

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
НАУКИ ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА
ИМЕНИ Ю.А. ОСИПЬЯНА РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Поплевин Антон Валерьевич

**Экспериментальное исследование вихревого течения, возбуждаемого
волнами на поверхности жидкости**

Специальность 1.3.8 –
«физика конденсированного состояния»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН
Левченко Александр Алексеевич

Научный консультант: к.ф.н.
Филатов Сергей Васильевич

Черноголовка 2025

Оглавление

Введение	4
Глава 1. Физические механизмы генерации вихревых течений поверх- ностными волнами	13
1.1 Закон дисперсии волн на поверхности	13
1.2 Дискретные моды колебаний поверхности жидкости в ячейке конечных размеров	14
1.3 Дрейф Стокса	15
1.4 Возбуждение вихревых течений поверхностными волнами. Решёт- ка вихрей	16
1.5 Крупномасштабное вихревое течение	18
1.6 Турбулентность. Турбулентный каскад	19
1.7 Эйлерова и Стоксова завихренность	21
1.8 Влияние поверхностной плёнки	23
1.9 Проникновение вихрей вглубь жидкости	23
1.10 Кластеризация частиц	25
Глава 2. Генерация полосообразного вихревого потока при нелинейных волнах на поверхности воды	27
2.1 Экспериментальная методика	27
2.2 Экспериментальные результаты и обсуждения	29
2.3 Выводы	41
Глава 3. Вихревое движение на поверхности мелкой и глубокой воды . .	43
3.1 Экспериментальная методика	43
3.2 Экспериментальные результаты и обсуждение	44
3.2.1 Генерация вихревого движения на поверхности воды	44
3.2.2 Особенности затухания вихревого движения на поверхно- сти воды	55

3.2.3	Экспериментальное наблюдение перехода от двумерного к трёхмерному турбулентному вихревому течению	
	воды	66
3.3	Выводы	69
Глава 4. Формирование распределения Парето в системе кластеров полиамидных частиц на поверхности воды		
		71
4.1	Экспериментальная методика	71
4.2	Экспериментальные результаты и обсуждения	72
4.2.1	Формирование распределения Парето в системах кластеров	
	на поверхности воды	72
4.2.2	Распределение Парето в системе кластеров полиамидных частиц	
	на поверхности воды	83
4.3	Выводы	87
Заключение		89
Список литературы		91

Введение

Актуальность темы. Нелинейность играет ключевую роль в динамике сложных природных и технических систем. Она определяет механизмы переноса энергии и импульса на разных пространственных и временных масштабах. Так слабая нелинейность в волновых системах приводит к сложным сценариям взаимодействия мод и возникновению как мелкомасштабных, так и крупномасштабных структур.

Волны на поверхности воды подразделяются на гравитационные и капиллярные в зависимости от своей длины. В реальных физических системах волновое движение нередко сопровождается генерацией вихревых течений, возникающих в результате нелинейного взаимодействия волн с непараллельными волновыми векторами. Понимание этих процессов имеет принципиальное значение для описания динамики атмосферных и океанических течений, распространения волн и вихрей в астрофизической и плазменной среде, а также для задач управления поверхностными течениями в прикладной гидродинамике.

Несмотря на существенные успехи в теоретическом описании волновых и вихревых систем, многие вопросы, связанные с генерацией вихрей, их структурой и механизмами диссипации, остаются открытыми. Наличие большого числа экспериментальных результатов, их объём пока не позволяют сформировать замкнутую теорию нелинейного взаимодействия волн и вихрей. Существенное влияние на характер наблюдаемых явлений оказывают как параметры возбуждения, так и граничные условия, включая глубину жидкости, наличие поверхностных плёнок и фоновые течения.

Настоящая работа посвящена экспериментальному исследованию взаимодействия волнового и вихревого движений на поверхности воды. В частности, изучается процесс генерации полосообразных вихревых течений, возникающих в результате возбуждения стоячих волн, распространяющихся под небольшим углом друг к другу. Установлено, что вихревое течение складывается из быстро

формирующего вклада дрейфа Стокса и медленно нарастающего Эйлера течения, чувствительного к физическим условиям на границе раздела фаз. Показано, что глубина воды существенно влияет на структуру формируемого вихревого движения и характер затухания энергии и энтропии после прекращения накачки.

Кроме того, исследуются процессы кластеризации полиамидных частиц, визуализирующих вихревое движение на поверхности воды. Выявлено, что в таких системах реализуется степенное распределение количества кластеров в зависимости от их размера, соответствующее распределению Парето. Экспериментальные наблюдения и численное моделирование подтверждают, что структура и динамика кластеров существенно зависят от фонового течения на поверхности жидкости.

Полученные результаты расширяют современные представления о волновых и вихревых системах, их взаимодействии и процессах самоорганизации поверхностных структур в ограниченных геометриях. Тем самым они способствуют как развитию общей теории нелинейных систем, так и её приложениям в области управления поверхностными и геофизическими потоками.

Степень разработанности темы исследования. Исследование генерации вихревых течений на поверхности жидкости под действием нелинейных поверхностных волн активно развивалось в последние десятилетия. В работах [1, 2, 3, 4, 5] показано, что взаимодействие слабонелинейных волн, отличающихся направлениями волновых векторов, приводит к формированию локализованных вихревых структур и решёток вихрей. Особое внимание уделено влиянию амплитуды возбуждения, ориентации волн и геометрии системы на масштаб и интенсивность индуцируемых течений.

Влияние поверхностной плёнки на процесс генерации приповерхностного вихревого течения исследовалось в [6, 7, 8], где показано, что упругие плёнки усиливают затухание волн и, как следствие, увеличивают амплитуду индуцируемого потока.

В настоящей работе впервые проведено систематическое экспериментальное исследование формирования полосообразных вихревых течений при возбуждении пересекающихся поверхностных волн. Пространственно-временной анализ полей скорости и завихренности позволил выделить вклад дрейфа Стокса и Эйлера течения в динамику формируемых структур.

Активно изучается двумерная турбулентность вихревых систем при возбуждении нелинейных поверхностных волн как в экспериментах, так и в численных

моделях. В работах [1, 2, 9] показано, что при возбуждении волн формируется двойной каскад энергии: от масштаба накачки как в сторону крупномасштабных структур, где энергия накапливается, так и в сторону мелкомасштабных структур, где происходит диссипация.

Экспериментальные исследования [6, 5, 7] показали, что динамика затухания вихрей зависит от глубины жидкости и частоты возбуждения. В мелких слоях формируется квазидвумерная турбулентность, где доминирует трение о дно, тогда как в глубоких слоях реализуется трёхмерная турбулентность с преобладанием объёмной вязкости. Однако систематическое исследование скоростей перестройки вихревого поля и условий перехода к трёхмерному режиму ранее не проводилось.

В данной работе проведено прямое измерение пространственно-временных полей скорости и завихренности на стадии затухания при различных амплитудах возбуждения. Выявлена критическая глубина, при которой осуществляется переход от двумерной к трёхмерной турбулентности.

Изучение кластеризации пассивных частиц на поверхности жидкости является одним из актуальных направлений гидродинамики. В работах [10, 11, 12] показано, что под действием сложных приповерхностных течений распределение плотности частиц становится сильно неоднородным и описывается степенными законами, близкими к распределению Парето.

Однако количественная связь между нелинейной динамикой вихревого поля, генерируемого пересекающимися поверхностными волнами, и параметрами степенных распределений кластеров до сих пор оставалась неясной. В данной работе проведено комплексное экспериментальное исследование пространственного распределения частиц и его сопоставление с топологией вихревого поля. Установлено, что параметры распределений Парето напрямую связаны с интенсивностью и масштабом формируемых вихревых структур.

Целями данной работы являются:

1. Экспериментальное исследование особенностей генерации вихревого движения на поверхности жидкости, формируемого слабо-неколлинеарными по поверхностными гравитационными волнами.
2. Экспериментальное исследование статистических свойств энергии и энтропии вихревого движения на поверхности глубокой и мелкой воды.
3. Экспериментальное изучение процессов кластеризации полиамидных ча-

стиц на поверхности воды.

Для достижения поставленных целей необходимо было решить следующие задачи:

1. Создать экспериментальную установку для формирования двух поверхностных волн под углом друг к другу и провести серию экспериментов по формированию вихревого течения слабо-неколлинearными волнами при различных параметрах накачки.
2. Исследовать распределения завихренности и энергии вихревого движения, генерируемого слабо-неколлинearными поверхностными волнами на частоте 2.34 Гц.
3. Провести серию экспериментов по формированию вихревых течений при разных глубинах жидкости.
4. Построить и сравнить функции плотности вероятности энергии и энтрофии вихревого движения на поверхности глубокой и мелкой воды.
5. Получить и проанализировать характер затухания энергии и энтрофии по времени на поверхности мелкой и глубокой воды – $E(t)$ и $\Phi(t)$.
6. Провести серию экспериментов по процессам кластеризации частиц на поверхности воды при различных значениях фоновых течений.
7. Построить и определить форму распределения плотности кластеров по площади и сравнить с результатами численного моделирования.

Научная новизна:

1. Впервые экспериментально показано, что взаимодействие слабо-неколлинearных поверхностных волн на воде приводят к формированию устойчивого полосообразного вихревого течения, масштаб которого определяется волновыми параметрами. Показано, что после включения накачки вклад Стокса в завихренность выходит на стационарное значение относительно быстро (за время вязкого затухания волны), в то время как Эйлеров вклад имеет характерное время выхода на стационар на 1.5 порядка больше.
2. Для системы поверхностных волн, возбуждаемых в ячейке с регулируемой глубиной жидкости, исследованы статистические свойства вихревого движения. Впервые показано, что на начальных стадиях возбуждения вихревого движения PDF модуля завихренности описываются распределением Гаусса независимо от амплитуды волн. При этом для распределения энергии выявлены отличия от нормального закона: на поверхности мелкой воды — при

малых амплитудах волн, на поверхности глубокой воды — при увеличении времени накачки, что связано с формированием крупномасштабных вихрей.

3. Впервые установлено, что квазистационарное распределение размеров кластеров полиамидных частиц на поверхности воды подчиняется закону Парето в широком диапазоне времён (до 120 часов) и хорошо описывается степенной функцией C/x^{-n} . Численные расчёты, учитывающие распад крупных кластеров, подтвердили экспериментальные наблюдения. Выявлена ключевая роль фонового течения в формировании распределения.

Практическая значимость. Полученные экспериментальные результаты и выводы могут быть использованы в исследованиях нелинейных процессов в волновых и вихревых системах, проводимых в Институте прикладной физики РАН (Нижний Новгород, Россия), Пермском государственном национальном исследовательском университете (Пермь, Россия), Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова (Москва, Россия), Институте им. Вейцмана (Реховот, Израиль), Австралийском национальном университете (Канберра, Австралия) и других научных организациях.

Полученные знания о процессе кластеризации полиамидных частиц на поверхности жидкости, включая определение характерных времён роста кластеров в зависимости от интенсивности фоновых течений, могут быть полезны научным группам, изучающим процессы кластеризации и агрегации микрочастиц, таким как Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (Москва, Россия), Федеральный исследовательский центр проблем химической физики и медицинской химии РАН (Черноголовка, Россия), Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана (Москва, Россия), Бостонский университет (Бостон, США), Пенсильванский университет (Филадельфия, США) и других научных организациях.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Полосообразное вихревое течение формируется на поверхности жидкости при возбуждении слабо-неколинеарных стоячих гравитационных волн. Его структура определяется углом между волнами, а пространственные характеристики согласуются с теоретическими предсказаниями.
2. Вертикальная завихренность может быть представлена в виде суммы вклада дрейфа Стокса и Эйлера члена: $\Omega = \Omega_S + \Omega_E$, причём вклад Эйлера члена приводит к накоплению полной завихренности на временах, превыша-

ющих время установления волнового движения, в отличие от вклада дрейфа Стокса.

3. При уменьшении глубины жидкости переход от трёхмерного к двумерному вихревому течению приводит к перестройке структуры вихревого поля и сопровождается изменением статистических характеристик турбулентного движения. В объеме мелкой воды вихревое течение жидкости является двумерным, а в объеме глубокой жидкости – трехмерным.
4. Распределение числа кластеров полиамидных частиц по размеру на поверхности жидкости подчиняется степенному закону Парето. Это распределение возникает вследствие случайных процессов слияния и распада кластеров.
5. Кластеризация частиц происходит при сохранении суммарного размера кластеров и степенном распределении количества кластеров по площади. Параметры получающегося распределения Парето зависят от длительности эксперимента, скорости фоновых течений и наличия внешнего возбуждения.

Методология и методы исследования. Методологическая основа работы опирается на системный подход, объединяющий теоретические, экспериментальные и аналитические методы. Теоретической базой служат положения гидродинамики, статистической физики и теории турбулентности, которые позволяют интерпретировать наблюдаемые явления как результат нелинейного взаимодействия волн, переноса энергии по спектру и формирования когерентных структур в квазидвумерных системах.

Экспериментальная методика заключалась в возбуждении слабонелинейных поверхностных волн в резервуаре с регулируемой глубиной с помощью плунжерного механизма, обеспечивающего стабильные частоты и амплитуды колебаний. В качестве трассеров использовали частицы полиамида РА-12, что позволило визуализировать движение на поверхности. Динамика регистрировалась видеосъемкой с последующей обработкой кадров.

Для анализа использовались методы цифровой визуализации потока: кросс-корреляционный анализ изображений (PIV) и трекинг частиц, позволившие получить поля скорости и завихренности. На их основе изучались пространственно-временные структуры, интенсивность вращения вихрей и характер переноса вещества. Спектральный анализ с использованием быстрого преобразования Фурье применялся для выявления каскадных процессов и оценки перераспределения энергии между масштабами.

Методы статистической обработки включали построение распределений скоростей и завихренности, анализ корреляций и сравнение с теоретическими законами (распределение Парето, степенные и экспоненциальные зависимости).

Системный характер исследования заключался в последовательности «эксперимент — обработка — теория»: лабораторные наблюдения дополнялись спектральным и статистическим анализом, а затем сопоставлялись с существующими моделями. Такой подход обеспечил целостное понимание механизмов генерации вихревых структур поверхностными волнами и позволил выявить новые закономерности их динамики.

Достоверность полученных результатов обеспечивается публикациями в рецензируемых ведущих физических журналах России и мира, а также обсуждениями на конференциях и семинарах. Результаты диссертации не противоречат данным, полученным другими авторами.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на:

1. Поплевин, А.В. Кинетика генерации крупномасштабного вихревого течения слабо-неколлинеарными нелинейными гравитационными волнами / А.В. Поплевин // VIII Международная молодежная научная школа-конференция «Современные проблемы физики и технологий» : сб. тр. (15–20 апреля 2019) / Москва, НИЯУ МИФИ. – 2019. – С. 281.
2. Филатов, С.В. Генерация полосообразного вихревого течения неколлинеарными волнами на поверхности воды / С.В. Филатов, А.В. Поплевин, А.А. Левченко, В.М. Парфеньев // 20-я научная школа «Нелинейные волны-2022» : сб. тр. (7–13 ноября 2022) / Нижний Новгород. – 2022. – С. 205–206.
3. Филатов, С.В. Особенности генерации вихревого движения волнами на поверхности мелкой и глубокой воды / С.В. Филатов, А.В. Поплевин, А.М. Лихтер [и др.] // 20-я научная школа «Нелинейные волны-2022» : сб. тр. (7–13 ноября 2022) / Нижний Новгород. – 2022. – С. 208.
4. Филатов, С.В. Генерация вихревого движения волнами на поверхности мелкой и глубокой воды / С.В. Филатов, А.В. Поплевин, Д.Д. Тумачев [и др.] // 3-я Международная конференция, посвященная 60-летию ИФТТ РАН «Физика конденсированных состояний» : сб. тр. (29 мая – 02 июня 2023) / Черноголовка. – 2023. – С. 24.
5. Левченко, А.А. Генерация вихревого движения волнами на поверхности мелкой и глубокой воды / А.А. Левченко, С.В. Филатов, А.В. Поплевин [и др.]

// 3-я Международная школа-конференция молодых ученых "Кайбышевские чтения": сб. тр. (16-20 октября 2023) / Уфа. – 2023. – С. 74.

6. Поплевин, А.В. Экспериментальное изучение процесса затухания вихревого движения на поверхности мелкой и глубокой воды / А.В. Поплевин // XXI научная школа «Нелинейные волны – 2024» : сб. тр. (5–11 ноября 2024) / Нижний Новгород. – 2024. – С. 192.
7. Поплевин, А.В. Экспериментальное исследование затухания вихревого движения на поверхности воды разной глубины / А.В. Поплевин // 4-я Международная конференция «Физика конденсированных состояний» ФКС-2025 : сб. тр. (2 – 6 июня 2025) / Черноголовка. – 2025. – С. 127.

Личный вклад. Все экспериментальные данные, представленные в работе, были получены при непосредственном участии автора. Исследования выполнены в Лаборатории Квантовых Кристаллов ИФТТ РАН в период с 2019 по 2025 гг.

Публикации. Основные результаты диссертационной работы изложены в 6 публикациях, входящих в перечень рецензируемых научных журналов, определённых ВАК:

- H1 The formation of Pareto distribution in tracer systems on the water surface / S.V. Filatov, A.V. Poplevin, A.A. Levchenko [et al.] // Results in Physics. — 2021. — Vol. 27. — P. 104446.
- H2 Pareto distribution in the system of polyamide particle clusters on the water surface / S.V. Filatov, E.V. Lebedeva, A.A. Levchenko [et al.] // Results in Physics. — 2021. — Vol. 29. — P. 104677.
- H3 Generation of stripe-like vortex flow by noncollinear waves on the water surface / S.V. Filatov, A.V. Poplevin, A.A. Levchenko, V.M. Parfenyev // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 2022. — Vol. 434. — P. 133218.
- H4 Features of the generation of vortex motion by waves on the surface of shallow and deep water / S.V. Filatov, A.V. Poplevin, A. M. Likhter [et al.] // Journal of Surface Investigation: X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques. — 2022. — Vol. 16, № 6. — P. 1135–1145.
- H5 Vortex motion on the surface of shallow and deep water / A.V. Poplevin, A.A. Levchenko, A. M. Likhter [et al.] // Journal of Surface Investigation: X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques. — 2024. — Vol. 18, № 3. — P. 717–725.

- H6 Experimental Observation of Transition from Two-Dimensional Turbulent Vortex Flow of Water to Three-Dimensional / A.V. Poplevin, A.A. Levchenko, A. M. Likhter [et al.] // Journal of Surface Investigation: X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques. — 2025. — Vol. 19, № 3. — P. 616–620.

Объем и структура работы. Работа состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы. Полный объём работы составляет 98 страниц, включая 43 рисунка. Список литературы содержит 85 наименований.

Глава 1. Механизмы генерации вихревых течений поверхностными волнами

1.1 Закон дисперсии волн на поверхности

Линейную волну в безграничной среде можно представить как суперпозицию плоских волн вида $e^{i(k \cdot r - \omega t)}$. Следовательно, любые линейные волны могут быть охарактеризованы дисперсионным соотношением между частотой ω и волновым вектором k . Зависимость $\omega(k)$ можно оценить из соображений размерности. Если доминирующей восстанавливающей силой является сила тяжести, то единственное возможное соотношение между ω , k и g имеет вид $\omega \sim \sqrt{gk}$. Если преобладает сила поверхностного натяжения, то, помимо коэффициента поверхностного натяжения σ , необходимо учитывать плотность жидкости ρ . Комбинация этих четырёх величин даёт оценку $\omega \sim \sqrt{\sigma k^3 / \rho}$.

В случае, когда силы тяжести сравнимы с силами поверхностного натяжения, а глубина жидкости сопоставима с длиной волны, закон дисперсии имеет следующий вид [13]:

$$\omega^2 = \left(gk + \frac{\sigma}{\rho} k^3 \right) \tanh(kh), \quad (1)$$

где h — глубина жидкости. Для свободной поверхности воды характерная частота перехода от гравитационных волн к капиллярным составляет примерно 17 Гц, а длина волны — $\lambda = 2\pi/k \approx 1,6$ см [14].

Если глубина жидкости значительно превышает характерную длину волны, то $kh \gg 1$ и $\tanh(kh) \approx 1$. Следовательно, в случае глубокой воды закон дисперсии гравитационно-капиллярных волн принимает вид:

$$\omega^2 = gk + \frac{\sigma}{\rho} k^3.$$

1.2 Дискретные моды колебаний поверхности жидкости в ячейке конечных размеров

Пространственное распределение волн на поверхности жидкости во многом определяется геометрией сосуда и условиями их возбуждения. В случае, когда бегущие волны отражаются от жёсткой границы и интерферируют с самими собой, формируется система стоячих волн. Форма таких стоячих волн определяется граничными условиями и возбуждаемыми модами. Если система имеет конечные размеры, то граничным условием для поверхностных волн служит невозможность проникновения жидкости сквозь стенку сосуда, то есть нормальная к границе компонента скорости должна быть равна нулю.

В ячейке прямоугольной формы стоячие волны могут быть описаны как суперпозиция двух синусоидальных стоячих волн, направленных вдоль ортогональных осей:

$$h(x, y, t) = H_1 \sin(kx) \cos(\omega t) + H_2 \sin(ky) \cos(\omega t + \phi),$$

где H – амплитуда колебаний поверхности, k – волновое число, ω – циклическая частота, t – время, а ϕ – разность фаз между волнами, распространяющимися в разных направлениях.

Бегущие волны, распространяющиеся от двух перпендикулярных стенок прямоугольной ячейки, описываются выражением:

$$h(x, y, t) = H_1 \sin(kx - \omega t) + H_2 \sin(ky - \omega t + \phi).$$

Поскольку система имеет конечные размеры, допускаются только определённые дискретные значения волновых чисел, соответствующие резонансным модам. Для прямоугольной области с длинами сторон L_x и L_y эти моды определяются условиями:

$$k_x = \frac{N\pi}{L_x}, \quad k_y = \frac{M\pi}{L_y}, \quad N, M \in \mathbb{N},$$

что соответствует формированию узлов и пучностей вдоль соответствующих направлений. Подробный анализ мод колебаний ограниченной жидкости можно найти, например, в [15]. Частота каждой моды определяется выражением (1). Дискретность спектра приводит к тому, что при возбуждении системы, даже широкополосном, в первую очередь возбуждаются наиболее устойчивые резонансные

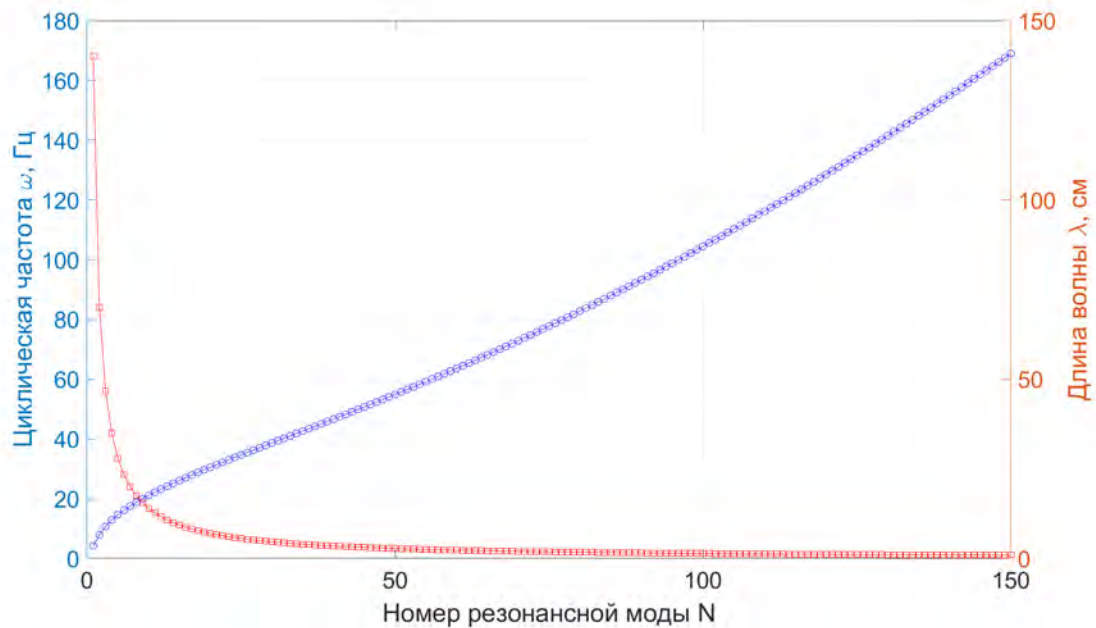


Рис. 1: Зависимость циклической частоты и длины волны поверхностных колебаний от номера резонансной моды (квадратная ячейка с ребром 70 см, глубина жидкости $h = 10$ см).

моды (см. рисунок 1). В области пучностей преобладает вертикальная скорость жидкости, тогда как в узлах — горизонтальная. На жёсткой границе горизонтальная компонента скорости должна обращаться в ноль. Таким образом, вдоль стенок сосуда формируются пучности волн.

1.3 Дрейф Стокса

Волновое движение жидкости на свободной поверхности описывается гармоническими колебаниями, амплитуда которых экспоненциально убывает с глубиной [13]:

$$V_x(x, z, t) = \omega H \cos(kx - \omega t) e^{kz},$$

$$V_z(x, z, t) = \omega H \sin(kx - \omega t) e^{kz}.$$

Среднее по периоду значение скорости в любой точке пространства равно нулю. Взятый на поверхности бесконечно малый элемент жидкости будет испытывать ненулевое смещение за период колебаний. Это связано с тем, что поле скорости жидкости зависит от времени, а траектория элемента жидкости определяется интегрированием мгновенной скорости вдоль её пути. Вследствие временной нестационарности поля скорости траектория элемента жидкости оказывается

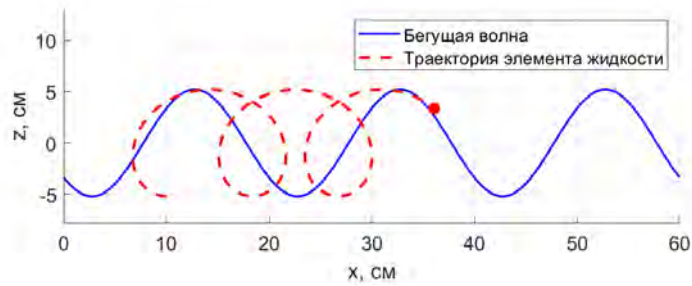


Рис. 2: Траектория бесконечно малого элемента жидкости, совершающей движение под действием бегущей волны. Синяя линия — профиль волны; красная пунктирная линия — траектория элемента жидкости, наглядно демонстрирующая эффект дрейфа Стокса.

незамкнутой и смещается после каждого периода. Иными словами, частица описывает эллиптическую траекторию, вытянутую вдоль направления распространения волны (см. рисунок 2).

Средняя скорость такого смещения, называемого дрейфом Стокса для случая глубокой воды ($kh \gg 1$), может быть оценена как [16]:

$$V_{St} = \frac{kH^2}{\omega}.$$

Этот дрейф представляет собой нелинейный эффект: его величина пропорциональна квадрату амплитуды возмущения H^2 и, следовательно, относится ко второму порядку малости по сравнению с основной волной, амплитуда которой линейно зависит от H .

1.4 Возбуждение вихревых течений поверхностными волнами. Решётка вихрей

Обычно поверхностные волны рассматриваются как колебательные процессы, локализованные вблизи границы раздела сред. Однако при наличии нелинейных эффектов они способны вызывать более сложные формы движения жидкости. Одним из наиболее интересных проявлений нелинейной динамики является генерация вихревых течений на поверхности — медленных, устойчивых или квазистационарных потоков, формирующихся в результате нелинейного взаимодействия волн.

Впервые возбуждение вихревого движения на поверхности воды было экс-

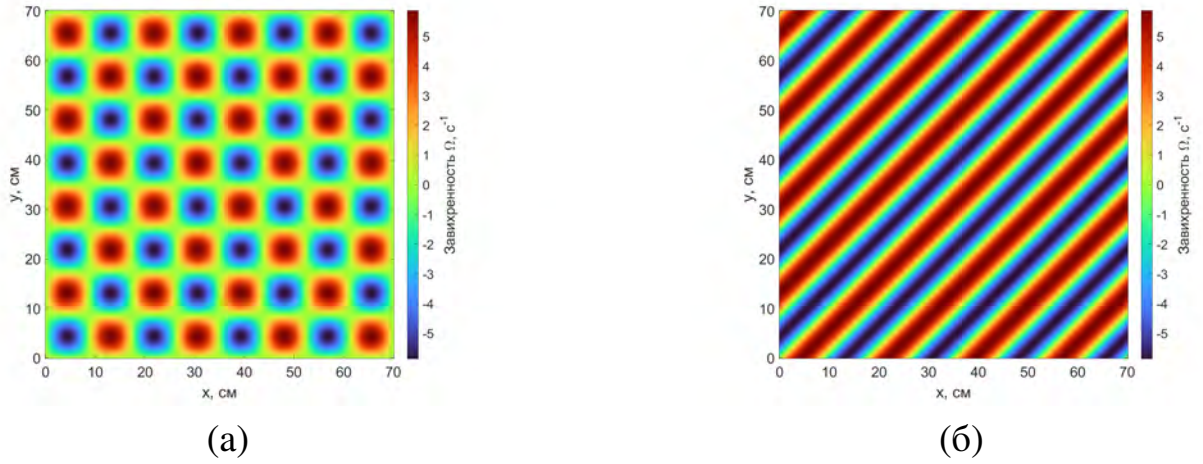


Рис. 3: Симуляция вертикальной завихренности $\Omega(x, y)$: (а) для стоячих волн – расчёт выполнен по выражению (3) и (б) для бегущих волн - расчёт выполнен по выражению (4). В обоих случаях использованы параметры $f = 3$ Гц и $\psi = \pi/2$.

периментально зафиксировано при исследовании фарадеевской неустойчивости в сосуде, совершающем вертикальные колебания [1, 2]. В таких системах при достижении порогового ускорения на поверхности формируются стоячие волны, которые при достаточно большой амплитуде могут приводить к возникновению квазидвумерной вихревой турбулентности.

Одним из ключевых механизмов образования вихрей является нелинейное взаимодействие поверхностных волн, распространяющихся под углом друг к другу [7, 9]. В результате их взаимодействия возникает вторичное течение, характеризующееся формированием пространственно организованной решётки вихрей. Эти вихри можно охарактеризовать с помощью величины, называемой завихренностью — ротора поля скорости. В двумерной постановке вертикальная компонента завихренности задаётся выражением [13]:

$$\Omega = \frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x}, \quad (2)$$

где V_x и V_y — компоненты скорости жидкости в горизонтальной плоскости.

При возбуждении стоячих волн с частотой ω в двух взаимно перпендикулярных направлениях завихренность Ω зависит от амплитуд волн H_1 , H_2 , волнового числа k и разности фаз между ними ψ и выражается как [4]:

$$\Omega = -(1 + \sqrt{2})H_1H_2\omega k^2 \sin(kx) \sin(ky) \sin(\psi), \quad (3)$$

а для случая бегущих волн завихренность не зависит от ψ и описывается выраже-

нием:

$$\Omega = (1 + \sqrt{2})H_1 H_2 \omega k^2 \sin(kx - ky). \quad (4)$$

Из выражений (3) и (4) следует, что завихренность складывается из двух вкладов. Первый обусловлен дрейфом Стокса [3], а второй — результат нелинейного взаимодействия волн [7]. Как отмечено в работе [4], формулы (3) и (4) носят универсальный характер и применимы как к гравитационным, так и к капиллярным волнам.

1.5 Крупномасштабное вихревое течение

По мере увеличения амплитуды волн, распространяющихся под углом 90° , на поверхности жидкости в установившемся режиме, помимо структуры типа «шахматной доски» из вихрей, формируется крупномасштабное вихревое течение, размер которого сопоставим с размерами экспериментальной ячейки [5, 8]. При этом не наблюдаются течения промежуточных масштабов.

В указанных работах волны возбуждались с помощью плунжеров, расположенных вдоль стенок квадратной экспериментальной ванны и совершающих вертикальные колебания. Поскольку между стенками и плунжерами сохраняется зазор порядка 1–2 см, вследствие краевых эффектов такие плунжеры могли возбуждать волны малой амплитуды, распространяющиеся под небольшим углом к бортам ванны [17]. В результате нелинейного взаимодействия поверхностных волн, распространяющихся параллельно стенкам, с волнами, движущимися под углом, формируется крупномасштабное вихревое течение. Согласно [18], его амплитуда обратно пропорциональна синусу половины угла между направлениями распространения волн. Таким образом, влияние малости амплитуды наклонных волн компенсируется малостью угла между направлениями распространения волн.

Другой метод возбуждения поверхностных волн основан на развитии фарадеевской неустойчивости и позволяет формировать статистически изотропный спектр возмущений. При достаточной амплитуде возможно наблюдение поверхностных течений в турбулентном режиме [1, 2, 19, 20, 21]. Статистические характеристики формирующихся течений демонстрируют ряд особенностей, характерных для двумерной турбулентности [22], что справедливо даже в случае глубокой воды. Поверхностное течение демонстрирует спектр энергии, характерный для обратного каскада ($\propto k^{-5/3}$); вторая структура скорости линейно растёт с рассто-

янием, что указывает на перенос энергии к большим масштабам; а при уменьшении размеров ячейки формируется один крупномасштабный когерентный вихрь [2].

1.6 Турбулентность. Турбулентный каскад

Турбулентность представляет собой крайне сложное и многообразное явление, возникающее в нелинейных системах с большим числом степеней свободы. Её ключевая особенность заключается в существовании направленного потока энергии в пространстве мод, приводящего к каскадным процессам переноса энергии между масштабами — от больших к малым или наоборот, от малых к большим.

В зависимости от природы взаимодействующих объектов выделяют два типа турбулентности: вихревую и волновую. Вихревая турбулентность обусловлена сложным взаимодействием вихрей, сопровождающимся интенсивным перемешиванием среды, и играет фундаментальную роль в процессах переноса массы, импульса и энергии в гидродинамических системах — от океанов и атмосферы до планетарных вихрей [23, 24, 25, 26]. Волновая турбулентность связана с нелинейным взаимодействием большого числа волн и проявляется в таких системах, как поверхности жидкостей (гравитационные и капиллярные волны) [27, 28, 29, 30], плазма [31] и квантовые жидкости, включая сверхтекучий гелий [32].

Центральным элементом в теории турбулентности является каскадная модель, описывающая перераспределение энергии в системе с большим числом степеней свободы. Согласно этой модели, энергия, вводимая в систему на определённом масштабе (в области накачки), передаётся к другим масштабам через нелинейные взаимодействия между модами. Ввод энергии осуществляется, как правило, внешним источником — например, механическим возбуждением волн или воздействием на определённый диапазон частот.

Дальнейшая эволюция определяется характером нелинейных взаимодействий, распределением энергии по спектру и масштабам, на которых реализуются процессы диссипации. Энергия начинает перемещаться от области накачки вдоль спектра волновых чисел, формируя поток через инерционный интервал — область, где доминируют нелинейные процессы при минимальном влиянии внешнего воздействия и диссипации.

Если передача энергии направлена к большим волновым числам (то есть к меньшим пространственным масштабам), такой процесс называется прямым каскадом. В конечном итоге энергия достигает области диссипации, где она рас-

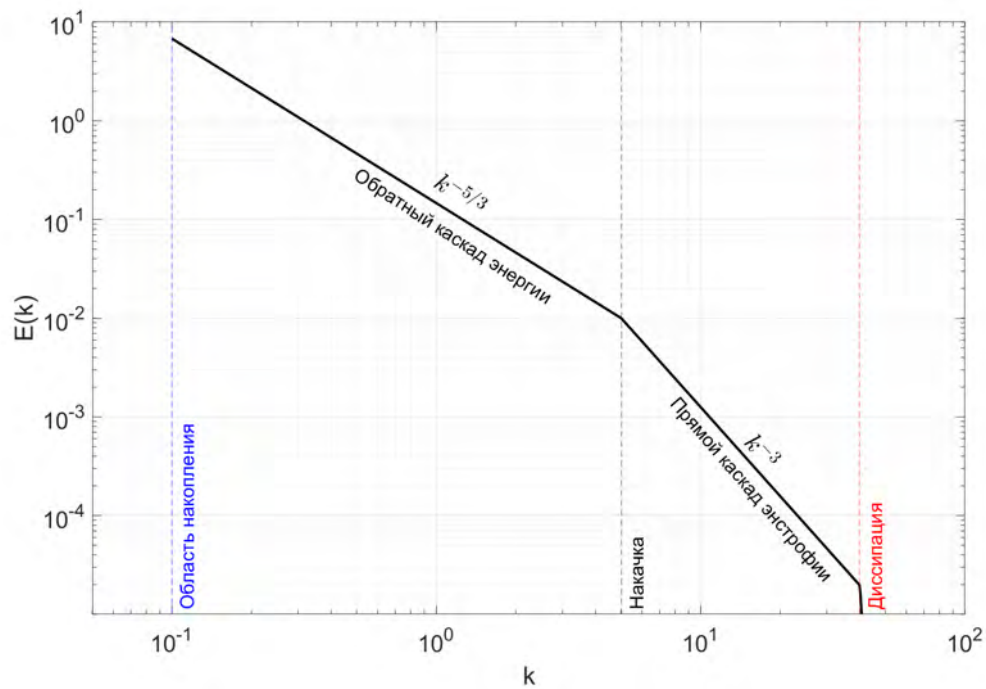


Рис. 4: Схематичное распределение спектра энергии $E(k)$ в квазидвумерной турбулентной системе. Отмечены области накопления энергии (обратный каскад, $k^{-5/3}$), накачки и диссипации (прямой каскад, k^{-3}). По оси абсцисс отложено волновое число k , обратно пропорциональное характерному размеру вихревых структур.

сеивается, преобразуясь в тепло. Прямой каскад характерен для классической трёхмерной турбулентности, а также для слабой волновой турбулентности.

В противоположном случае, когда энергия переносится от области накачки в сторону меньших волновых чисел (больших масштабов), наблюдается обратный каскад. При этом энергия накапливается на масштабах, ограниченных геометрией системы или свойствами среды. Обратные каскады возможны в системах с сохранением дополнительных интегралов движения или при дискретности спектра взаимодействий. Они приводят к формированию крупномасштабных когерентных структур — вихрей, струй или длинноволновых возмущений.

Существенным фактором, влияющим на характер каскада, является глубина жидкости. При большой глубине система ведёт себя как трёхмерная, и в ней наблюдается преимущественно прямой каскад. Однако при уменьшении глубины до значений, меньших характерной длины волны в случае волновой турбулентности и характерного масштаба вихря в случае вихревой турбулентности, система переходит в квазидвумерный режим. В этом случае, как было предсказано в работе [33] и подтверждено в последующих численных и лабораторных исследованиях [34, 35], возникают оба типа каскадов: как прямой, так и обратный.

Таким образом, каскадная модель турбулентности предполагает существование трёх характерных областей: область накачки, область диссипации и область накопления энергии. Поток энергии, проходящий через инерционный интервал, определяет направление каскада. В установившемся (стационарном) режиме устанавливается энергетический баланс: количество энергии, вводимой в систему, равно суммарной энергии, теряемой на малых масштабах из-за вязкости и на больших — за счёт взаимодействия с границами системы.

Наблюдения каскадных процессов подтверждены как в экспериментах с классическими жидкостями [36], так и в исследованиях сверхтекучего гелия и жидкого водорода [37, 38, 39].

1.7 Эйлера и Стокса завихренность

Как было сказано ранее, волны, распространяющиеся на поверхности жидкости, вследствие нелинейного взаимодействия могут возбуждать вихревое движение. Теоретическая модель, описывающая это явление, включает два взаимодополняющих механизма генерации завихренности.

Первый механизм связан с переносом жидкости, обусловленным дрейфом Стокса. Согласно этому механизму, вихревое движение мгновенно возникает в каждой точке, где присутствуют волны, и исчезает сразу после их затухания или ухода из области наблюдения. Стоксову завихренность можно описать выражением (см. [18, уравнение 2]):

$$\Omega_S = \omega k^2 H_1 H_2 \sin 2\theta \cos^2 \theta \cos [2ky' \sin \theta] . \quad (5)$$

где x' - оси, направленная по биссектрисе между направлением двух стоячих волн, а y' - ось, перпендикулярная оси x' . Дрейф Стокса проявляется в лагранжевом описании движения жидкости, но не регистрируется в Эйлеровом представлении. По этой причине возникающее вихревое движение не обладает собственной инерцией и существует только в присутствии волн.

Второй механизм формирования вихревого течения связан с возникновением завихренности в Эйлеровых координатах. Этот процесс происходит в области приповерхностного вязкого слоя за счёт нелинейного взаимодействия волн. Например, для волн с частотой 6 Гц на поверхности воды толщина вязкого подслоя составляет $\delta = \sqrt{2\nu/\omega} \sim 250$ мкм [16], что значительно меньше длины и ам-

плитуды волны, но, тем не менее, превышает характерный размер полиамидных частиц РА-12 (порядка 30 мкм), используемых в экспериментах. Следовательно, траектории частиц определяются исключительно течением в вязком подслое.

Эти два вклада существенно различаются по амплитуде в установившемся режиме и по характерным временам релаксации. В работе [18] установлено, что для двух поверхностных волн, распространяющихся под углом 2θ друг к другу на поверхности глубокой жидкости, отношение установившихся амплитуд Эйлеровой и Стоксовой завихренности составляет $\Omega_E/\Omega_S = 1/\sin\theta$. Вклад дрейфа Стокса мгновенно отслеживает изменения в волновом движении, и его характерное время затухания можно оценить как $T_S \sim T_{\text{волн}}/2$, поскольку дрейф пропорционален квадрату амплитуды. Эйлеров вклад формируется в вязком подслое и затем распространяется вглубь жидкости за счёт вязкой диффузии. Его характерное время даётся оценкой $T_E = L^2/(\pi^2\nu)$, где ν — кинематическая вязкость, а L — характерный размер вихря.

Для типичных экспериментальных условий выполняется неравенство $T_S \ll T_E$ из-за дополнительной диссипации волнового движения у границ сосуда [40, 13] и загрязнения поверхности [41, 42]. Последний фактор также существенно влияет на амплитуду Эйлеровой завихренности Ω_E на поверхности жидкости [40, 41]. Тем не менее, теория предсказывает универсальную временную зависимость для роста Эйлеровой завихренности:

$$\Omega_E(t) \propto \text{erf}\left[\sqrt{t/T_E}\right], \quad \text{erf}[x] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x d\xi e^{-\xi^2}. \quad (6)$$

Это выражение справедливо и в случае жидкости конечной глубины, однако его применимость ограничена временем $t \ll h^2/\nu$, пока завихренность не успела распространиться до дна сосуда.

Описанная модель верна при условии, что Эйлеровы течения достаточно слабы, и их нелинейным взаимодействием можно пренебречь. Это означает, что число Рейнольдса $Re = \Omega_E(t)T_E$ должно оставаться малым.

Таким образом, полная вертикальная завихренность на поверхности жидкости описывается как сумма двух вкладов:

$$\Omega = \Omega_S + \Omega_E. \quad (7)$$

1.8 Влияние поверхностной плёнки

Теория, развитая в работе [4], дала качественное понимание особенностей генерируемого течения — в частности, зависимости его амплитуды от произведения амплитуд волн и синуса разности фаз между ними, а также пространственной структуры течения. Тем не менее добиться количественного согласия с экспериментом не удалось: амплитуда наблюдаемого течения превышала теоретическое предсказание на порядок.

В эксперименте было установлено, что на поверхности жидкости формировалась тонкая плёнка, изменяющая граничные условия. Эти изменения, в частности, приводили к резкому возрастанию скорости затухания волн при практически неизменном законе их дисперсии. В одной из первых работ по данной теме [43] было отмечено, что скорость затухания может зависеть от времени. Предполагается, что поверхностная плёнка образуется в результате абсорбции поверхностно-активных веществ из воздуха.

Роль плёнки в динамике поверхностных волн подробно рассматривалась в ряде работ [44, 45, 6, 46, 47]. В частности, показано, что наличие плёнки усиливает диссипацию волн, что делает невозможным экспериментальное наблюдение обратного каскада в режиме слабой турбулентности гравитационных волн [42].

Свойства образующейся плёнки заранее неизвестны, поскольку процесс её формирования неконтролируем. В общем случае, при малых деформациях, её реологические свойства описываются четырьмя параметрами: модулем упругого растяжения, двумя вязкостями (одна характеризует диссипативный отклик при растяжении/сжатии, другая — при сдвиге), а также модулем сдвига [48].

Однако в работах [49, 41, 40] было показано, что при определённых условиях и ряде допущений влияние плёнки может быть адекватно описано одним параметром — модулем упругого растяжения. Это оказалось достаточным для достижения согласия между теорией и экспериментом [40].

1.9 Проникновение вихрей вглубь жидкости

Как было описано выше, вихри, формируемые поверхностными волнами, проникают в объём жидкости. Теоретический анализ, представленный в работе [41], показывает, что в стационарном состоянии завихренность Ω убывает с

увеличением глубины z по экспоненциальному закону:

$$\Omega \sim \exp(-2z/z_0) + \exp(-\sqrt{2}z/z_0), \quad (8)$$

где $z_0/2$ — характерная глубина проникновения. Такое поведение связано с двумя механизмами формирования поверхностных вихрей: дрейфом Стокса (первый член в уравнении 8), обусловленным лагранжевым переносом частиц вблизи поверхности, и Эйлеровым течением (второй член), возникающим за счёт вязкого взаимодействия [5].

Экспериментальные исследования [20, 21] подтверждают, что энергия горизонтальных течений, индуцированных поверхностными волнами, быстро затухает с глубиной и остаётся локализованной в приповерхностном слое. Характерная глубина проникновения такого движения составляет величину порядка длины возбуждающей волны, делённой на 4π . Эти результаты согласуются с классическими представлениями о затухании волн и вихрей в вязкой жидкости и подчёркивают важность вертикальной структуры потока при анализе волново-вихревого взаимодействия.

Следует отметить, что в ряде работ [19, 50] было показано, что волны Фарадея и другие нелинейные колебания на поверхности жидкости могут возбуждать объёмные течения, приводящие к формированию вихревых структур различной направленности и масштаба. Кроме того, в исследованиях [2, 51] сообщается, что при наличии многослойной структуры жидкости, а также даже в однородной среде, нелинейные взаимодействия волн способны вызывать вторичные неустойчивости, такие как неустойчивость Кельвина–Гельмгольца. Это, в свою очередь, приводит к генерации объёмных вихрей, распространяющихся вглубь. Хотя указанные эффекты наиболее выражены в системах с вертикальной стратификацией плотности, даже в однослойной жидкости вихревое движение, возбуждаемое волнами, может проникать на глубину, сравнимую с длиной волны, формируя трёхмерное течение.

Наконец, стоит подчеркнуть, что как вихревое, так и волновое движение на поверхности жидкости затухает в результате вязких потерь в объёме, а также вследствие трения о стенки и дно сосуда. Вязкая диссипация в объёме становится доминирующим каналом потерь в случае глубокой воды, когда глубина h существенно превышает характерные размеры волн ($h \gg \lambda/2\pi$) и вихрей ($h \gg L/2\pi$). Напротив, в условиях мелкой воды ($h \ll L$) основным механизмом затухания энергии становится трение о дно.

1.10 Кластеризация частиц

Кластеризация частиц на поверхности жидкости — это процесс их сближения и агрегации с последующим образованием устойчивых структур. Он обусловлен действием различных сил, возникающих между частицами и передающихся через жидкость. Характер кластеризации зависит от размера и физико-химических свойств частиц, свойств жидкости, а также внешних условий.

Существует несколько основных механизмов кластеризации. В коллоидных системах с частицами размером менее одного микрометра доминируют броуновское движение и дисперсионные силы Ван-дер-Ваальса. Согласно теории коагуляции Смолуховского [52], эти факторы приводят к образованию агрегатов в условиях, когда сила тяжести и влияние поверхностного натяжения незначительны [53, 54, 55, 56, 57, 58].

В противоположном случае, когда размеры частиц сопоставимы с капиллярной длиной жидкости, наибольшее значение приобретает сила поверхностного натяжения. Агрегация в этом режиме приводит к снижению поверхностной энергии системы [59, 60, 61, 62]. При сближении частиц происходит деформация менисков на поверхности жидкости, что вызывает притягивающее взаимодействие и способствует формированию кластеров [63, 64].

Особый интерес представляет промежуточный режим, включающий частицы размером от десятков до сотен микрометров. Здесь характер взаимодействия определяется совокупным влиянием геометрии, смачиваемости частиц и физических свойств жидкости. Так, в работах [65, 66] показано, что фрактальная размерность кластеров из гидрофобных углеродных стержней (100–200 мкм) ниже, чем у кластеров из стеклянных шариков диаметром 75 мкм. Это объясняется различием в распределении капиллярных сил: у шариков с радиально симметричным мениском формируются более плотные структуры, тогда как неравномерный изгиб мениска у стержней способствует образованию более рыхлых кластеров. Подобные эффекты наблюдаются и на границе жидкостей [67], где кластеризация определяется одновременно электростатическими взаимодействиями и силами поверхностного натяжения. Например, в работе [68] описано образование кластеров из стеклянных микросфер на поверхности жидкого гелия. Несмотря на их хорошее смачивание, силы поверхностного натяжения оказываются значимыми из-за чрезвычайно малой капиллярной длины в этой системе.

Особенности кластеризации полиамидных гранул, используемых для визуа-

лизации течений на поверхности воды, обусловлены их физическими характеристиками. Эти частицы обладают плотностью, близкой к плотности воды, хорошо смачиваются, но не погружаются, удерживаясь на поверхности благодаря силам Ван-дер-Ваальса [69]. При этом поверхность остаётся плоской, а взаимодействие между частицами обусловлено в основном электростатическими силами дальнодействующего характера. Такие силы описываются степенной зависимостью от расстояния, причём показатель степени определяется типом электростатического взаимодействия.

Глава 2. Генерация полосообразного вихревого течения неколлинеарными волнами на поверхности ВОДЫ

2.1 Экспериментальная методика

Исследования проводились в экспериментальной установке, схема которой представлена на рисунке 5. Установка состоит из ванны с размерами $70 \times 70 \times 20$ см, изготовленной из стекла толщиной 1 см. Ванна заполняется дистиллированной водой до глубины $h = 10$ см. Сверху ванна закрывается прозрачным стеклом для уменьшения попадания на поверхность воды пыли из воздуха [40]. Ванна расположена на виброизолирующем столе Standa. Стенки ванны изолированы пенополистироловой теплоизоляцией толщиной 5 см с целью предотвращения образования конвекционного потока жидкости.

Волны на поверхности воды возбуждаются волнопродукторами, закреплёнными на виброизолирующем столе. Волнопродукторы состоят из плунжера и привода. Плунжеры представляют собой трубки из нержавеющей стали диаметром 1 см и длиной 30 см. Один из плунжеров был установлен под углом 19° к стенке, второй располагался параллельно стенке ванны на расстоянии 1 см от неё. В качестве привода волнопродукторов использовались сабвуферы TS-W254R (Pioneer) номинальной мощностью 250 Вт. Синусоидальные сигналы с частотой 2.34 Гц задавались двухканальным генератором Agilent 33522B, усиливались и подавались на приводы. Разница фаз между сигналами, подаваемыми на сабвуферы, была равна $\psi = \pi/2$.

Для визуализации поверхностного течения на поверхность воды наносился белый порошок полиамидных частиц со средним диаметром около 30 мкм. Частицы полиамида на поверхности воды образуют плоские кластеры с характерным размером 1–3 мм. Плотность образующихся кластеров близка к плотности воды, поэтому их можно рассматривать как частицы нейтральной плавучести. Поэто-

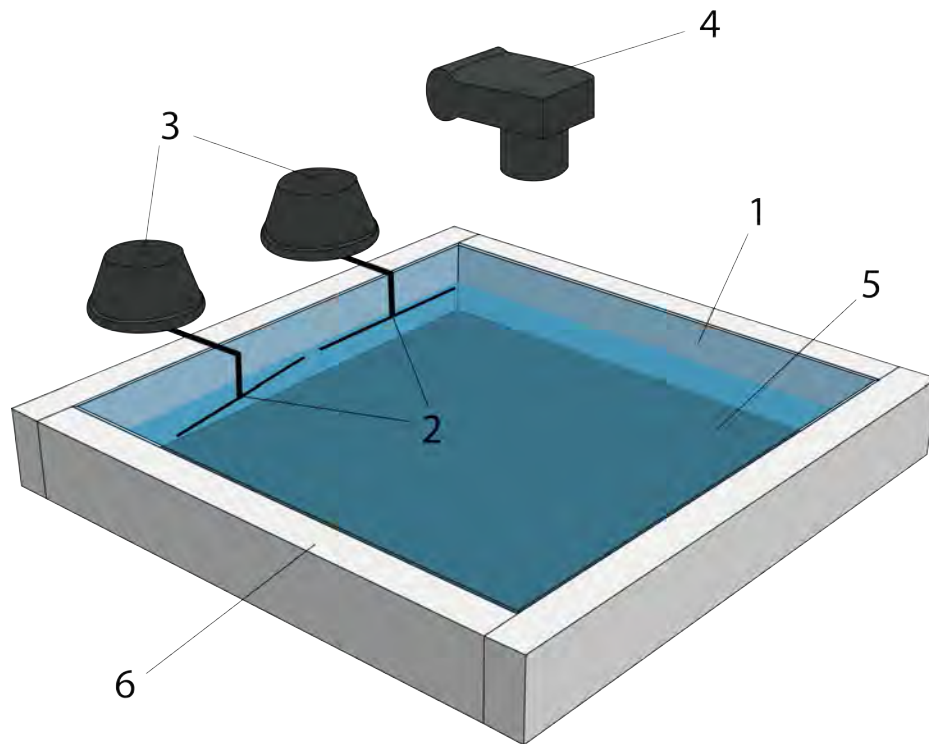


Рис. 5: Схема экспериментальной установки: (1) — ванна, (2) — плунжеры, (3) — приводы плунжеров, (4) — камера, (5) — вода, (6) — теплоизоляция.

му полагается, что частицы полностью увлекаются потоком жидкости. Частицы на поверхности освещались светодиодами, расположенными по периметру ванны. Движение частиц, плавающих на поверхности жидкости, регистрировалось камерой Canon EOS 70D с частотой съёмки 24 кадра в секунду. Кросс-корреляционный анализ пар изображений с использованием пакета PIVLab [70] для MATLAB позволил получить поле горизонтальной скорости, связанное с движением частиц, а затем вычислить вертикальную завихренность Ω медленного течения на поверхности.

Одновременно с этим регистрировались вертикальные колебания поверхности жидкости с помощью методики [71], которая основана на восстановлении кривизны поверхности путём анализа оптических искажений контрастного изображения трафарета на дне ванны. Контрастный трафарет освещался светодиодами, размещёнными под прозрачным дном ванны, и фиксировался той же камерой сверху. Светодиодная подсветка под дном ванны синхронизировалась с чётными кадрами видеозаписи, а светодиодная подсветка по периметру ванны — с нечётными.

Применяя к полученным данным преобразование Фурье с оконной функцией Ханна, находилось распределение вертикальной завихренности на поверхно-

сти жидкости и спектр волн в k -пространстве. Функция Ханна спадает по краям, поэтому её применение позволяет ослабить эффекты конечного размера и достичь периодических граничных условий для сигнала. Затем вычислялись высота волн и амплитуда завихренности на основе значений соответствующих пиков в k -пространстве. Метод регистрации и алгоритмы обработки данных подробно обсуждались в [5].

2.2 Экспериментальные результаты и обсуждения

В начальный момент времени жидкость находилась в состоянии покоя, после чего началась генерация волнового движения путём подачи синусоидальных сигналов одинаковой амплитуды на два сабвуфера. Через некоторое время на поверхности воды формируются три вихря, интенсивность которых увеличивается со временем. На рисунке 6а показаны характерные треки декорирующих частиц. Вихри наклонены под углом $\theta = 18^\circ$ к оси и имеют удлинённую форму. Можно сказать, что они образуют три полосы шириной $L = 23$ см каждая, а длина ограничивается размером системы. На рисунке 6б показаны соответствующие распределения вертикальной завихренности на поверхности воды. Средняя вихревая полоса имеет положительный знак завихренности по отношению к двум другим. Через 1080 секунд после начала эксперимента накачка была отключена (полная остановка плунжеров). После этого волновое и вихревое движения начали затухать, а запись видео продолжалась ещё 530 секунд. Данные, представленные на рисунке 6а и б, соответствуют моменту времени $t = 1000$ секунд после начала эксперимента. Амплитуда волны, распространяющейся вдоль оси, в стационарном режиме составляет 0.43 мм. На рисунках 7 и 8 изображены треки полиамидных частиц и распределения вертикальной завихренности на поверхности воды для амплитуд накачки 0.17 мм, 0.29 мм, 0.43 мм, 0.57 мм, 0.72 мм и 0.85 мм соответственно. Для каждой амплитуды накачки были рассчитаны эффективные числа Рейнольдса $Re = \Omega_E(t)T_E$: 4, 7, 10, 13, 17 и 20.

На рисунке 9а показано распределение энергии вертикальных колебаний поверхности на частоте 2.34 Гц в k -пространстве в момент времени $t = 1000$ секунд. Эти данные описывают центральную область экспериментальной ячейки, поскольку они были получены с использованием преобразования Фурье с оконной функцией Ханна. В первом приближении можно сказать, что на поверхности воды возбуждаются две стоячие волны, и их энергии различаются в несколько раз. Вол-

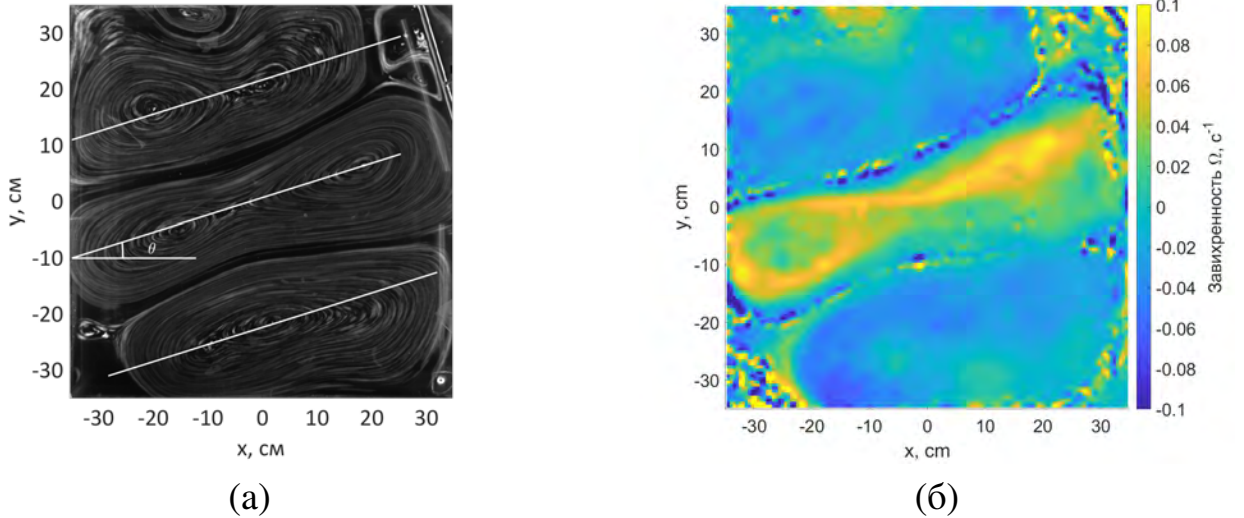
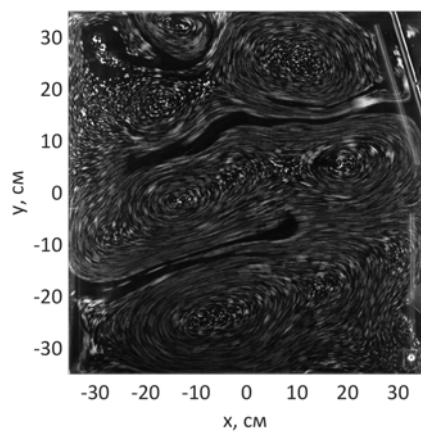


Рис. 6: (а) Треки полиамидных частиц на поверхности жидкости, полученные через 1000 секунд после начала накачки. (б) Соответствующее распределение вертикальной завихренности на поверхности воды. Амплитуда волны, распространяющейся вдоль оси X , в стационарном режиме составляет 0.43 мм.

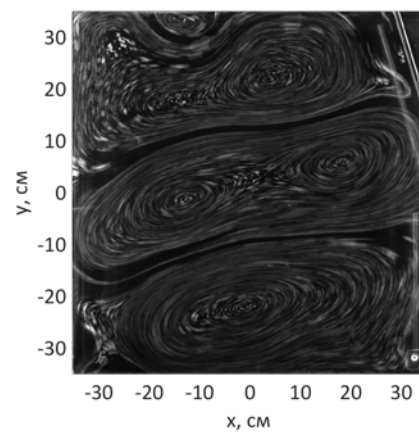
новое число обеих волн равно $k \approx 0.22 \text{ см}^{-1}$, что соответствует длине волны $\lambda \approx 28$ см. Отметим, что $kd \approx 2.2$, поэтому можно считать, что волны распространяются почти на глубокой воде [13].

Волна, распространяющаяся вдоль оси X , соответствует резонансному режиму системы: 5 полуволн укладываются на длину ванны 70 см. Аналогичное условие выполняется и для второй волны (см. рисунок 9в). Она распространяется под углом $2\theta = \arctan(3/4) \approx 36^\circ$ к оси X . Поскольку моды вырождены по частоте, они возбуждаются одновременно. Подчеркнём, что направление распространения второй волны не совпадает с перпендикулярным наклоном плунжера. Также отметим, что угол наклона вихрей на рисунке 6а и б составляет половину угла между возбуждёнными волнами.

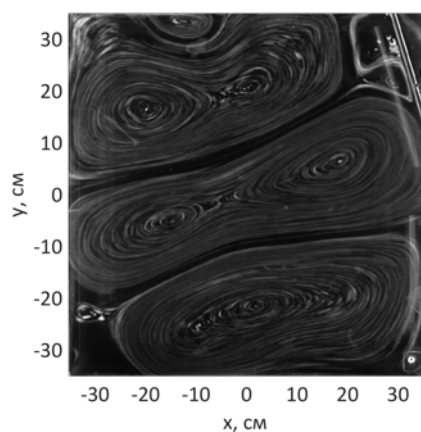
На рисунке 9б изображено распределение вертикальной завихренности в k -пространстве. Два ярких пика соответствуют вытянутой вихревой структуре, наклонённой под углом $\theta \approx 18^\circ$ к оси X и показанной ранее на рисунке 6а. Также отметим наличие двух более слабых пиков, которые указаны на рисунке 9б. Вертикальная завихренность возникает на поверхности в результате нелинейного взаимодействия двух неколлинеарных волн, описанных выше, поэтому в Фурье-пространстве пики распределения завихренности расположены на расстоянии $2k \sin \theta$ и $2k \cos \theta$ от начала координат. Ширина наиболее интенсивной вихревой структуры должна быть равна $L = \pi/(2k \sin \theta) \approx 23$ см, что хорошо со-



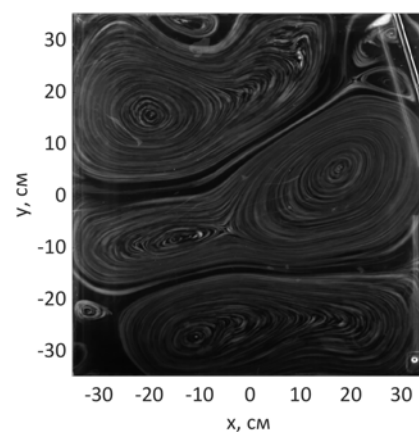
(a)



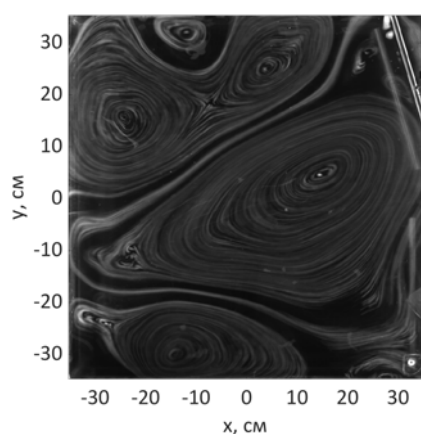
(б)



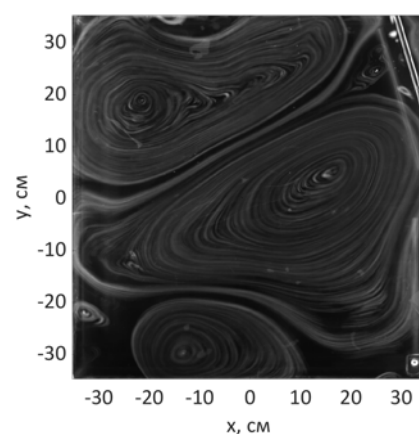
(в)



(Г)

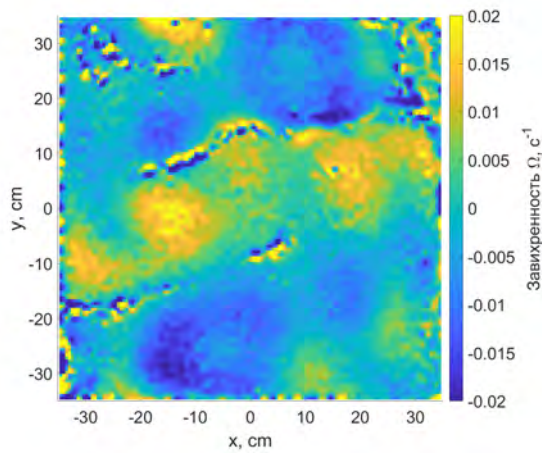


(д)

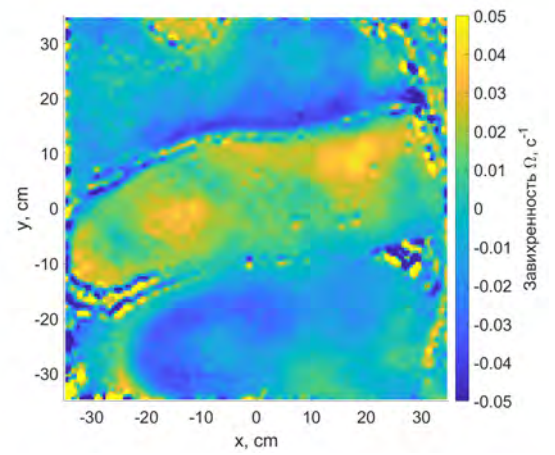


(е)

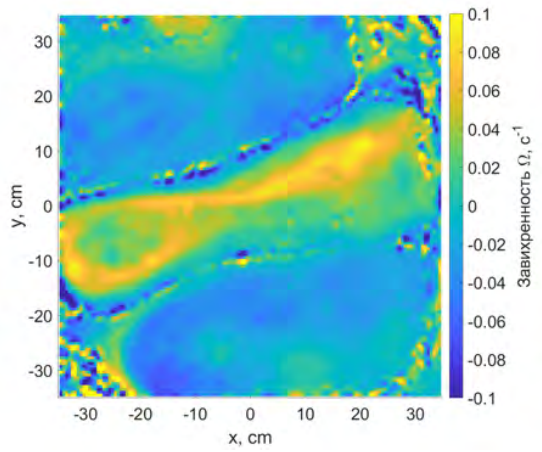
Рис. 7: Треки полиамидных частиц на поверхности жидкости, полученные через 1000 секунд после начала накачки при амплитудах волны, распространяющейся вдоль оси X , в стационарном режиме: (a) 0.17 мм, (б) 0.29 мм, (в) 0.43 мм, (г) 0.57 мм, (д) 0.72 мм, (е) 0.85 мм.



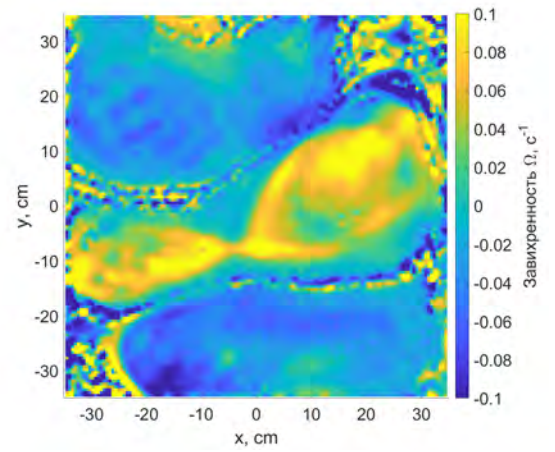
(a)



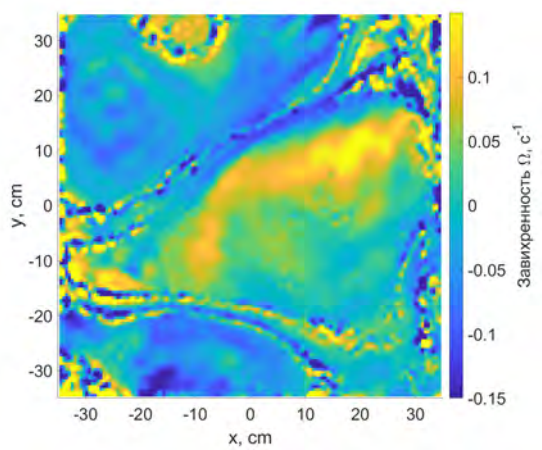
(б)



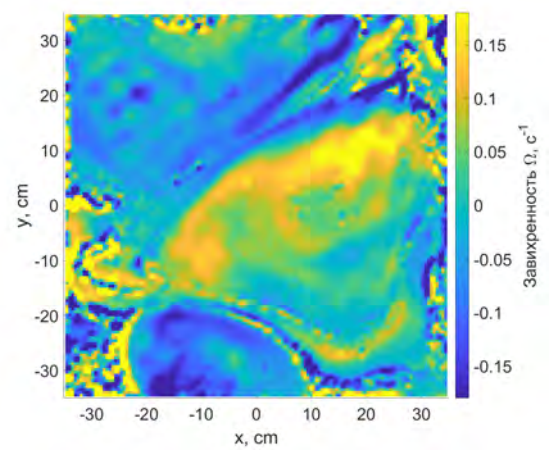
(в)



(г)



(д)



(е)

Рис. 8: Распределение вертикальной завихренности на поверхности воды при амплитудах волны, распространяющейся вдоль оси X , в стационарном режиме: (а) 0.17 мм, (б) 0.29 мм, (в) 0.43 мм, (г) 0.57 мм, (д) 0.72 мм, (е) 0.85 мм.

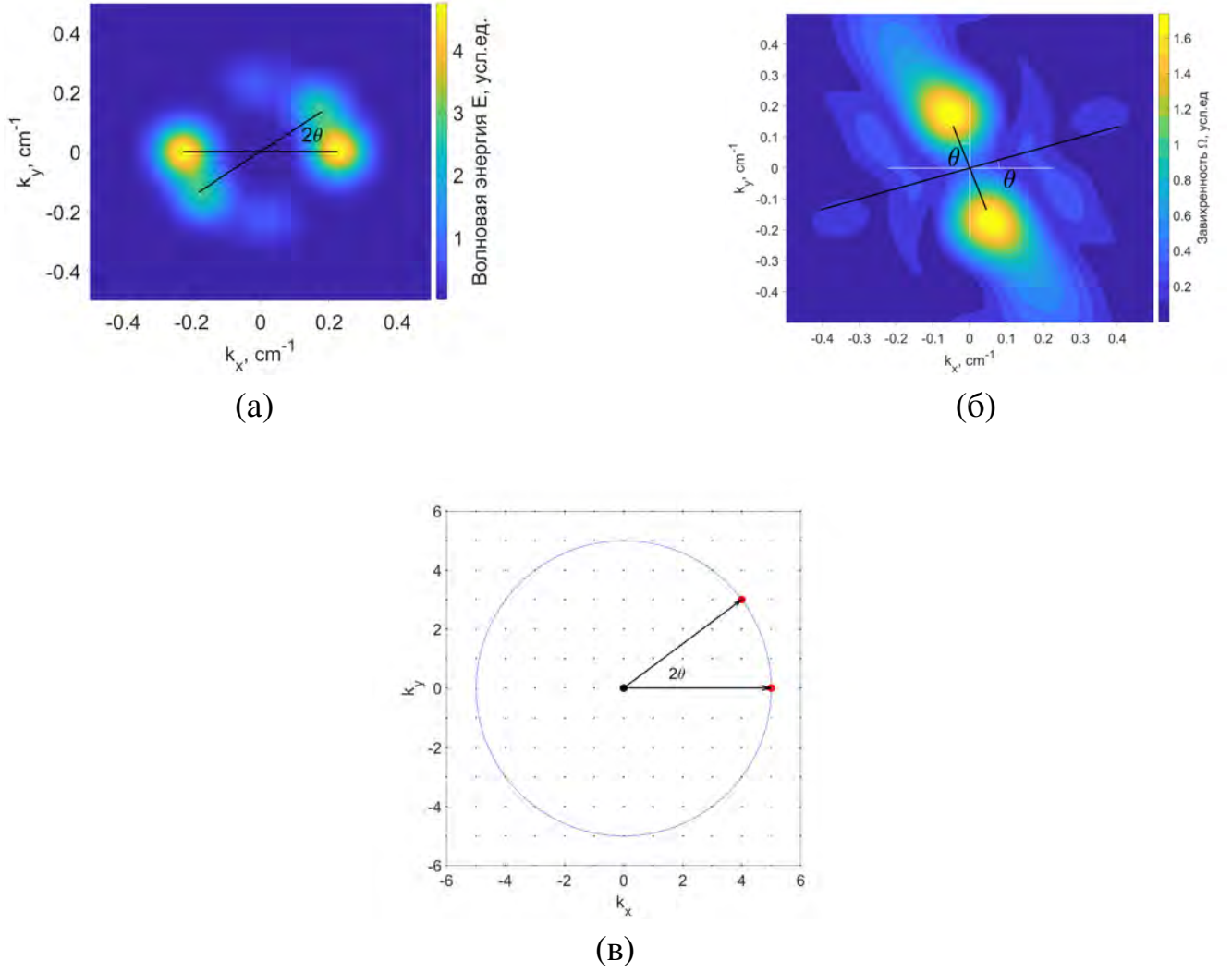


Рис. 9: Распределения (а) волновой энергии и (б) вертикальной завихренности в k -пространстве, полученные через 1000 секунд после начала накачки. Концы чёрных линий обозначают положение пиков, рассчитанных теоретически с использованием закона дисперсии $\omega^2 = gk$ и условий резонанса, определяющих угол $2\theta = \arctan(3/4)$. Амплитуда волны, распространяющейся вдоль оси X , в стационарном режиме составляет 0.43 мм. (в) Теоретически рассчитанные резонансные моды в системе.

гласуется с результатами, представленными на рисунке 6а, б. На рисунках 10 и 11 представлены распределения волновой энергии и вертикальной завихренности при разных амплитудах накачки. Видно, что положение пиков на распределении волновой энергии в k -пространстве практически не меняется по мере увеличения амплитуды волны. Положение пиков на распределении вертикальной завихренности в Фурье-пространстве несущественно, но меняется.

Затем происходило вычисление амплитуд волн H_1 и H_2 и амплитуды завихренности, соответствующие наиболее интенсивной вихревой структуре, на основе значений пиков в k -пространстве, после чего исследовалась их зависимость от времени для различных интенсивностей накачки. Здесь и далее будем обозначать

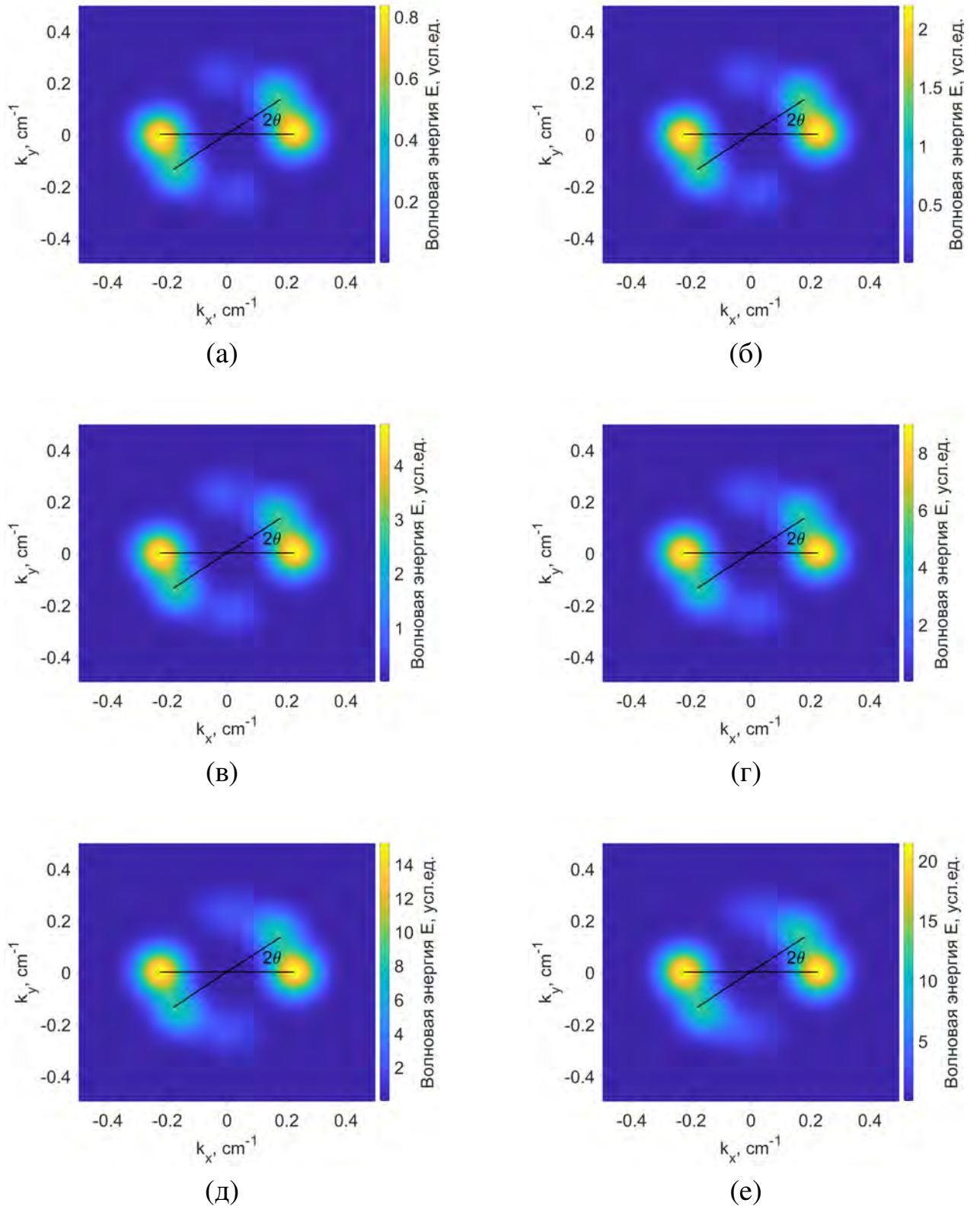
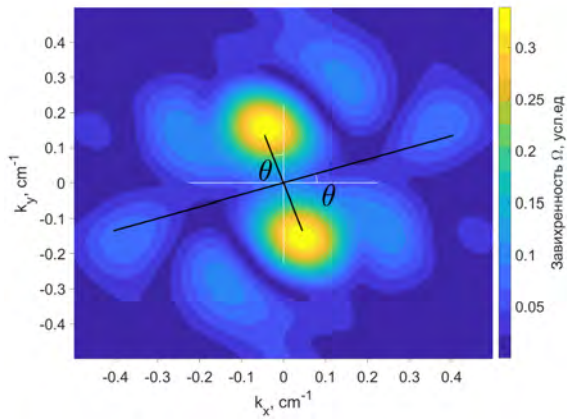
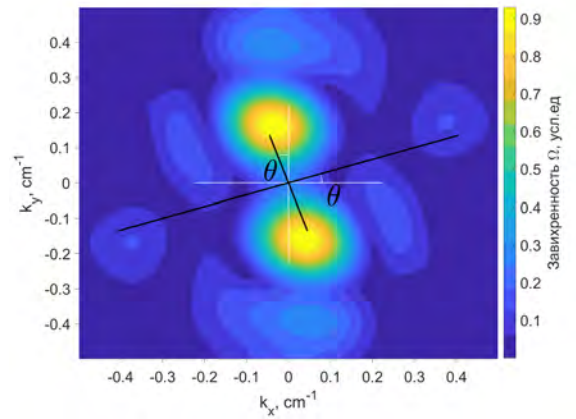


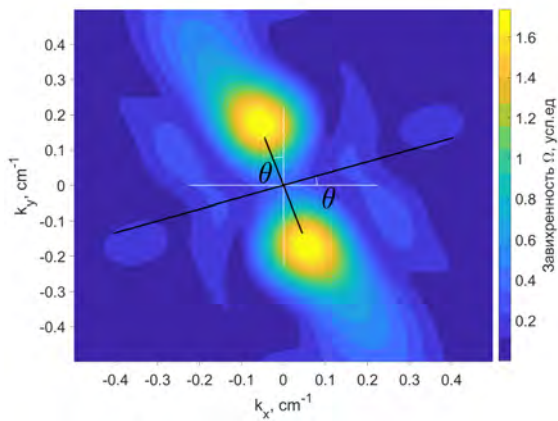
Рис. 10: Распределение волновой энергии в k -пространстве, полученное через 1000 секунд после начала накачки при амплитудах волны, распространяющейся вдоль оси X , в стационарном режиме: (а) 0.17 мм, (б) 0.29 мм, (в) 0.43 мм, (г) 0.57 мм, (д) 0.72 мм, (е) 0.85 мм.



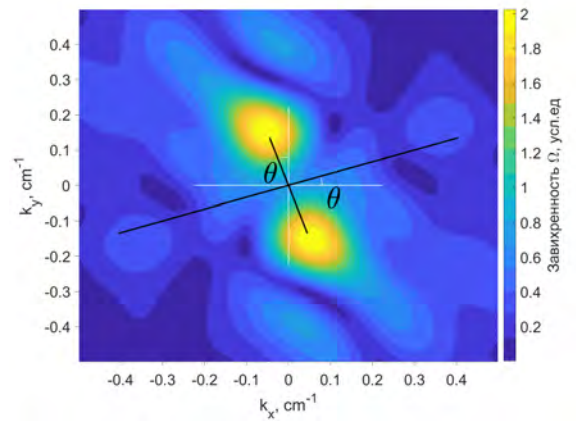
(а)



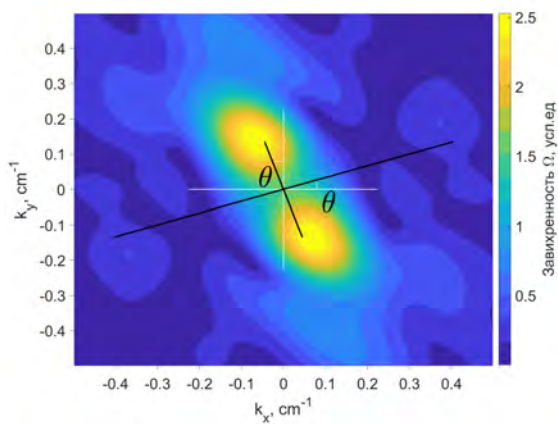
(б)



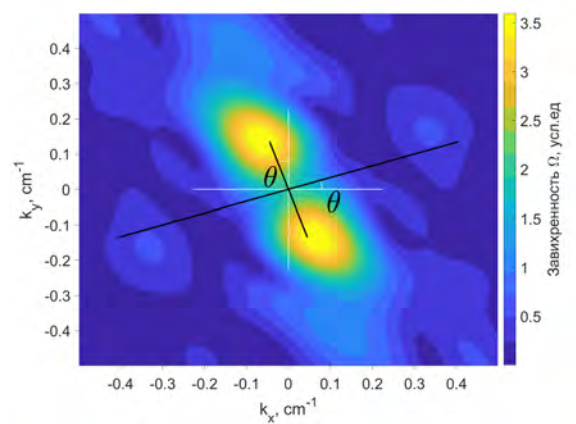
(в)



(г)



(д)



(е)

Рис. 11: Распределение вертикальной завихренности в k -пространстве, полученное через 1000 секунд после начала накачки при амплитудах волны, распространяющейся вдоль оси X , в стационарном режиме: (а) 0.17 мм, (б) 0.29 мм, (в) 0.43 мм, (г) 0.57 мм, (д) 0.72 мм, (е) 0.85 мм.

H_1 - амплитуда волны, распространяющейся в направлении X , а H_2 - амплитуда волн, распространяющейся под углом $2\theta \approx 36^\circ$ к оси X .

На рисунке 12а показана зависимость произведения амплитуд $H_1 H_2(t)$ от времени для разных интенсивностей накачки. Стоячие волны устанавливаются в течение первых пяти секунд, т.е. за время, которое приблизительно равно времени пробега волн от плунжеров до противоположных стенок и обратно. Напомним, что групповая скорость волны на частоте 2.34 Гц составляет примерно 36 см/с. Немонотонность зависимости $H_1 H_2(t)$ обусловлена небольшим расхождением частоты накачки и частоты резонансной моды. Биения амплитуд колебаний затухают полностью примерно через 100 секунд, после чего произведение амплитуд становится постоянным.

На рисунке 12б представлена зависимость $\Omega(t)$, начиная с 0.5 секунды после начала эксперимента. На временах короче 100 секунд она следует за изменениями произведения $H_1 H_2(t)$ амплитуд волн. На более длительных временах произведение амплитуд волн не меняется, но завихренность $\Omega(t)$ (см. рисунок 12б) продолжает увеличиваться, т.е. наблюдается накопление Эйлера вклада $\Omega_E(t)$, поскольку вклад дрейфа Стокса $\Omega_S(t)$ остаётся на постоянном уровне.

На рисунке 13а показано, что установившаяся амплитуда H_2 волны, распространяющейся под углом $2\theta \approx 36^\circ$ к направлению X , изменяется синхронно с установившейся амплитудой H_1 при изменении уровня накачки и $H_2 = 0.77H_1$.

Кривые, показанные на рисунке 12а и рисунке 12б аналогичны, и это позволяет нам рассчитать коэффициент масштабирования K_{sc} , который позволит соотнести данные экспериментов с разными амплитудами волны H_1 с данными, которые были получены при амплитуде накачки $H_1 = 0.17$ мм.

Чтобы определить коэффициент масштабирования, рассматривается момент времени $\tau = 100$ секунд, когда амплитуды волн становятся стационарными, и вычисляются соотношения:

$$K_{sc}^{(1)} = \frac{H_1 H_2(\tau, n)}{H_1 H_2(\tau, 1)}, \quad K_{sc}^{(2)} = \frac{\Omega(\tau, n)}{\Omega(\tau, 1)}, \quad (9)$$

где $f(\tau, n)$ обозначают значения $f(\tau)$ для экспериментальной кривой с номером n . Результаты, представленные на рисунке 13б, показывают, что оба отношения хорошо описываются одной и той же функцией $K_{sc} = \beta H_1^2$, где множитель β равен 33.5.

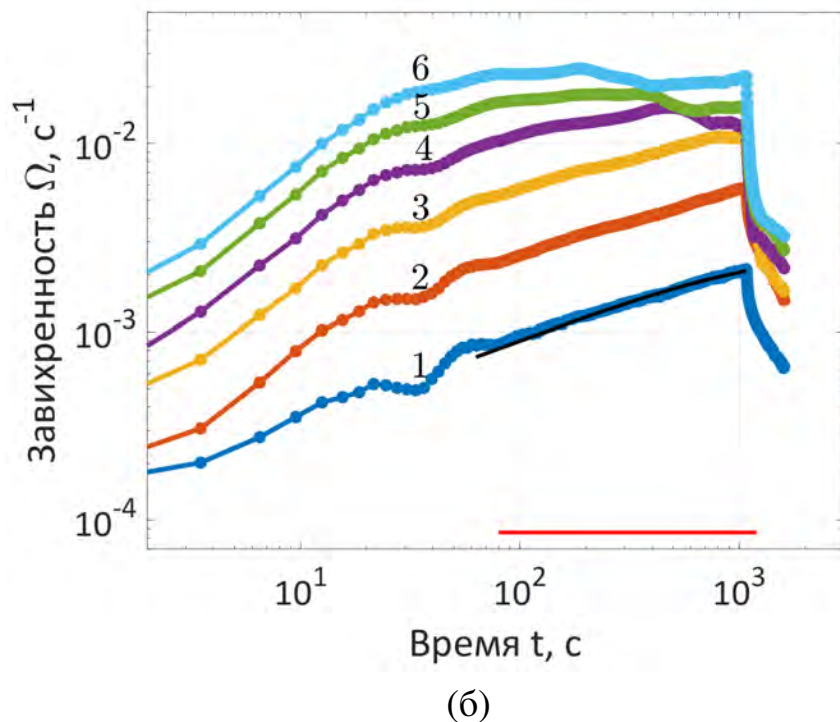
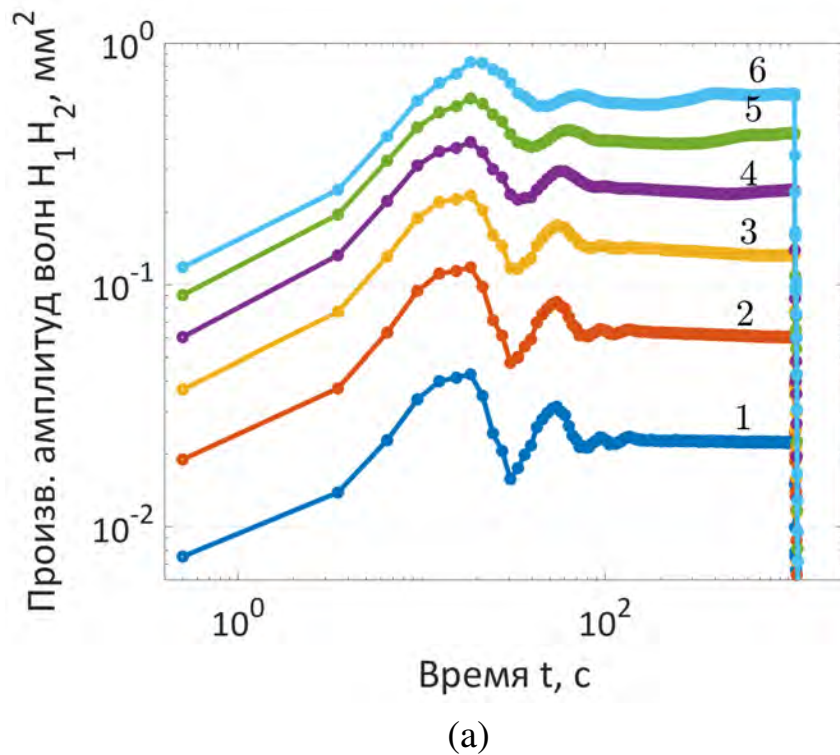


Рис. 12: (а) Зависимости произведения амплитуд волн $H_1 H_2(t)$ от времени и (б) амплитуды вертикальной завихренности $\Omega(t)$ на поверхности жидкости. Разные кривые соответствуют разным значениям амплитуды волны H_1 , распространяющейся вдоль оси X , в стационарном режиме: 1 – 0.17 мм, 2 – 0.29 мм, 3 – 0.43 мм, 4 – 0.57 мм, 5 – 0.72 мм, 6 – 0.85 мм. Амплитуда второй волны $H_2 = 0.77 H_1$ см. рисунок 12а. На рисунке 12б также показан теоретический результат, соответствующий модели при модуле сжатия поверхностной плёнки $\varepsilon = 0.37$ и времени $T_E = 1001$ с (чёрная линия), а также снос Стокса, оценённый по формуле (5) при $t > 10^2$ с (красная линия).

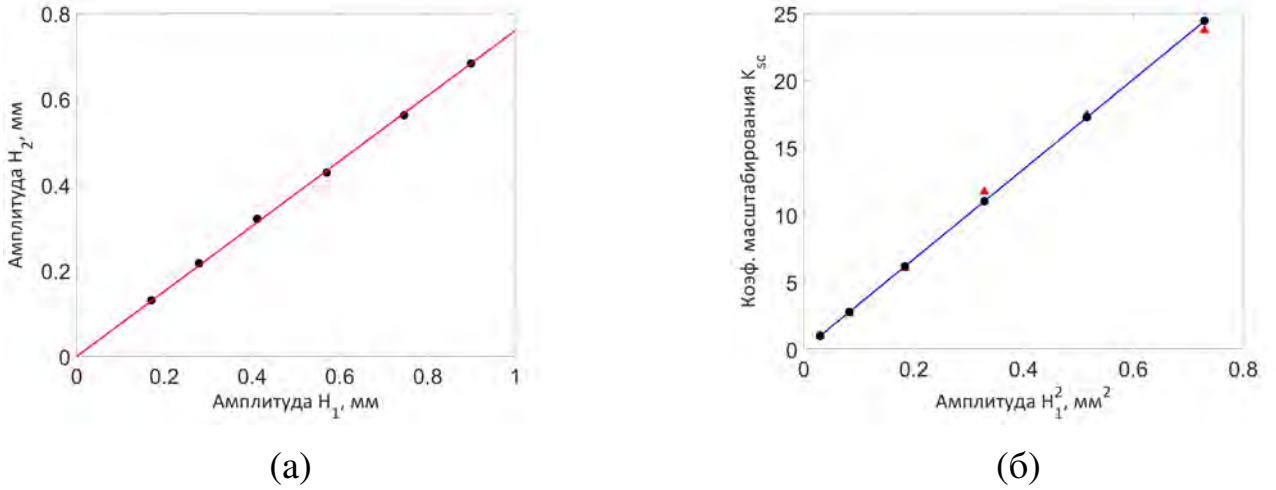


Рис. 13: Зависимости (а) установившейся амплитуды H_2 и (б) коэффициента масштабирования K_{sc} от установившейся амплитуды H_1 при различных амплитудах накачки. На рисунке 13б маркер Δ обозначает, что K_{sc} вычислялся с использованием зависимости $H_1 H_2(t)$, а $\bullet$ – с использованием зависимости $\Omega(t)$.

Результаты масштабирования представлены на рисунке 14. Показаны экспериментальные точки, начиная с 3-й секунды после установления стоячих волн на поверхности жидкости. При относительно небольших амплитудах волн кривые $\Omega(t)/K_{sc}$ хорошо совпадают между собой, а с увеличением степени нелинейности начинают появляться различия. Отметим, что аналогичные замедления роста завихренности по времени с увеличением амплитуды волн наблюдались и ранее в [40]. Хорошее совпадение масштабированных кривых при низких амплитудах установившейся волны означает, что генерируемая завихренность $\Omega(t)$ пропорциональна произведению амплитуд установившейся волны, поскольку $K_{sc} \propto H_1 H_2$.

При больших амплитудах волн степень нелинейности увеличивается, что приводит к взаимодействию между вихрями. Форма вихря искажается (см. рисунок 7е), и теоретическое описание перестаёт работать. Количественно степень нелинейности можно охарактеризовать эффективным числом Рейнольдса $Re = \Omega_E(t) T_E$ для медленного течения. Полученные результаты показывают, что нелинейность становится существенной при $Re > 10$ (см. рисунки 7). Это согласуется с предыдущими измерениями [40]. Обратим внимание, что нелинейными эффектами в стоячих волнах можно пренебречь во всех экспериментах.

Что касается стадии затухания, то после выключения накачки из рисунков 12а и 12б видно, что волновое движение затухает намного быстрее, чем вихревое движение. Детальный анализ этого этапа позволяет определить характерное время затухания волн, которое оказывается равным $\tau = 2T_S \approx 30$ секунд. Завихрен-

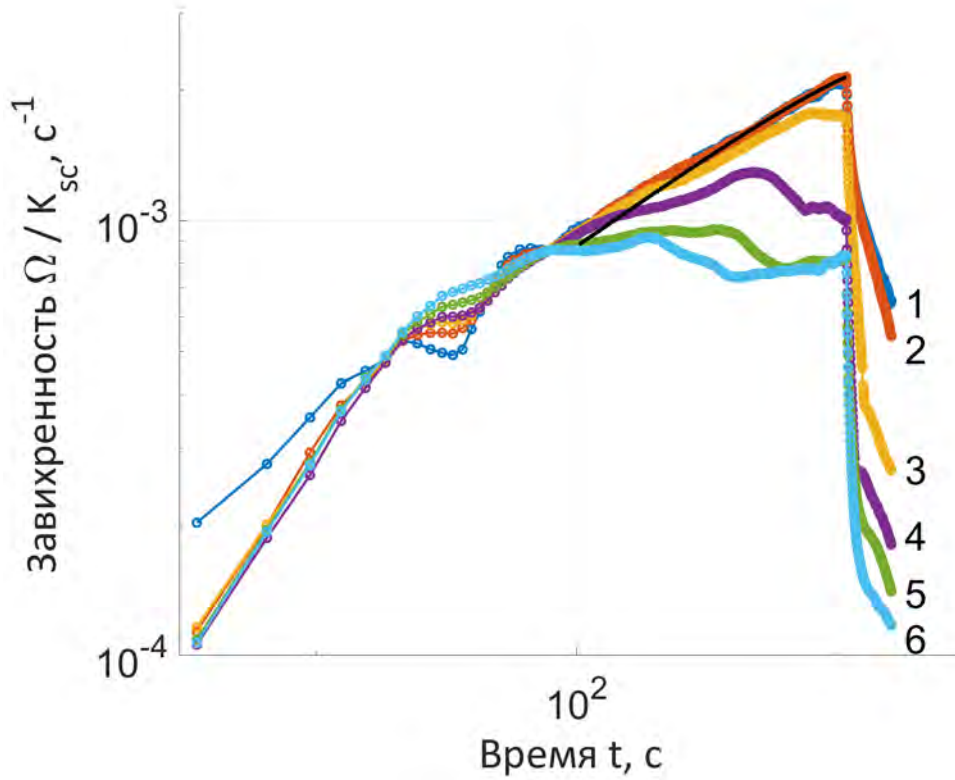


Рис. 14: Временная зависимость завихренности $\Omega(t)/K_{sc}$ при разных уровнях накачки, выраженная через амплитуду стационарной волны H_1 , распространяющейся вдоль оси X : 1 - 0.17 мм, 2 - 0.29 мм, 3 - 0.43 мм, 4 - 0.57 мм, 5 - 0.72 мм, 6 - 0.85 мм. Сплошная чёрная линия соответствует теоретическому предсказанию, с модулем сжатия плёнки $\varepsilon = 0.37$ и $T_E = 1001$ секунд.

ность спадает намного медленнее с характерным временем, близким к $T_E \approx 1000$ секунд. Это значение меньше теоретической оценки $T_E = L^2/(\pi^2\nu) \approx 5 \times 10^3$ секунд, что, по-видимому, можно объяснить трением вихрей о границы системы.

Формирование вихревого течения, индуцированного неколлинеарными волнами на поверхности глубокой воды, было теоретически исследовано в работе [18]. Направим ось X' вдоль полос, показанных на рисунке 6, а ось Y' – перпендикулярно им. В данной системе координат возвышение поверхности можно записать в следующем виде:

$$h(t, x', y') = H_1 \cos(\omega t) \cos(kx' \cos \theta - ky' \sin \theta) + H_2 \cos(\omega t + \psi) \cos(kx' \cos \theta + ky' \sin \theta) \quad (10)$$

где ψ – фазовый сдвиг между возбуждёнными волнами, которым можно управлять, изменяя фазовый сдвиг между электрическими сигналами, подаваемыми на плунжеры. Параметры выбраны так, чтобы значение ψ было близко к $-\pi/2$.

В дальнейшем нас будет интересовать вертикальная завихренность, соот-

ветствующая двум наиболее ярким пикам на рисунке 9б. Вклад Ω_S , связанный со сносом Стокса, описывается выражением (5). Что касается Эйлера вклада в вертикальную завихренность, то, поскольку волновое движение устанавливается значительно быстрее по сравнению с вихревым потоком ($T_S \ll T_E$), а продолжительность эксперимента мала по сравнению с характерным временем вязкой диффузии до дна системы ($t \ll h^2/\nu$), справедливо следующее выражение:

$$\Omega_E = \left(2 + \frac{\varepsilon^2 / \cos^2 \theta}{2\sqrt{2}\gamma(\varepsilon^2 - \varepsilon\sqrt{2} + 1)} \right) \omega k^2 H_1 H_2 \times \times \cos^3 \theta \cos[2ky' \sin \theta] \operatorname{erf} \left[\sqrt{t/T_E} \right]. \quad (11)$$

Здесь введено обозначение $\gamma = \sqrt{\nu k^2 / \omega}$ и предполагается, что поверхность жидкости может быть покрыта тонкой нерастворимой плёнкой в результате загрязнения [42]. Наличие такой плёнки на поверхности жидкости может существенно усиливать интенсивность вихревых течений, что было продемонстрировано в работе [40] для ортогональных стоячих волн. В простейшей модели свойства плёнки могут быть описаны с помощью одного параметра – безразмерного модуля сжатия $\varepsilon \geq 0$, введённого в работе [41] и характеризующего поведение плёнки на частоте ω и масштабе $1/k$. Предел свободной поверхности соответствует значению $\varepsilon \rightarrow 0$, а в противоположном случае, при $\varepsilon \rightarrow \infty$, речь идёт о практически несжимаемой поверхностной плёнке.

Далее используем уравнение (7) совместно с соотношениями (5) и (11) для объяснения измеренной зависимости $\Omega(t)$. Результаты представлены на рисунках 12б и 14 сплошными чёрными кривыми. Наилучшее согласие с экспериментальными данными достигается при модуле сжатия поверхностной плёнки $\varepsilon = 0.37$ и характерном времени Эйлеровой релаксации $T_E = 1001$ с, что соответствует результатам, полученным при анализе стадии затухания. Отметим также, что наличие плёнки на поверхности жидкости увеличивает скорость диссипации волнового движения после отключения накачки. Для оценки ожидаемого времени затухания волн τ используется выражение из работы [40, уравнение 5]:

$$\frac{1}{\omega\tau} = 2\gamma^2 \left(1 + \frac{1}{\gamma kl\sqrt{2}} \right) + \frac{\gamma}{2\sqrt{2}} \frac{\varepsilon^2}{(\varepsilon^2 - \varepsilon\sqrt{2} + 1)}, \quad (12)$$

где $l = 70$ см – длина стороны квадратной экспериментальной ванны, а соответствующий член учитывает диссипацию вблизи границ системы [13, §25]. После

прямолинейных вычислений получаем значение $\tau \approx 63$ с. Оно превышает экспериментальное значение, однако совпадает с ним по порядку величины. Полагаем, что это расхождение обусловлено дополнительными механизмами потерь энергии, не учтёнными в теоретической модели (например, трением жидкости о плунжер, который после отключения накачки частично оставался погружённым в жидкость). Что касается значения модуля сжатия поверхностной плёнки $\varepsilon = 0.37$, то оно хорошо согласуется с результатами, полученными ранее [40].

Наконец, оценим относительный вклад дрейфа Стокса и Эйлера члена. При времени 100 секунд и амплитуде волны $H_1 = 0.17$ мм Эйлеров вклад составляет $\Omega_E = 9.7 \times 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, тогда как завихренность, обусловленная сносом Стокса, равна $\Omega_S = 8.5 \times 10^{-5} \text{ с}^{-1}$. При времени 1000 с и той же амплитуде волны Эйлеров вклад увеличивается до $\Omega_E = 2.1 \times 10^{-3} \text{ с}^{-1}$, в то время как значение Ω_S остаётся прежним.

2.3 Выводы

Экспериментально показано, что волны, распространяющиеся под углом 2θ на поверхности воды, генерируют полосообразное вихревое течение. Ширина полос может быть оценена как $L = \pi/(2k \sin \theta)$, а их длина ограничивается размерами системы. Вертикальная завихренность потока Ω пропорциональна произведению амплитуд волн и может быть представлена в виде суммы вклада дрейфа Стокса и Эйлера члена: $\Omega = \Omega_S + \Omega_E$, см. выражения (5) и (6)

Снос Стокса практически мгновенно отслеживает изменения амплитуд волн, поэтому скорость изменения данного вклада определяется скоростью установления волнового движения. При больших временах вклад Ω_S в полную вертикальную завихренность $\Omega(t)$ оказывается малым.

Эйлеров вклад, напротив, обладает сравнительно медленной кинетикой, и его рост с течением времени хорошо описывается зависимостью $\Omega_E(t) \propto \text{erf}(\sqrt{t/T_E})$. Именно этот вклад приводит к увеличению полной завихренности $\Omega(t)$, что наблюдается на рисунке 12б при временах, превышающих время установления волнового движения. Также установлено, что экспериментально измеренное время T_E оказывается значительно меньше его теоретической оценки $T_E = L^2/(\pi^2 \nu)$, что, по-видимому, обусловлено трением вихрей о боковые стенки системы.

Количественное согласие с теорией достигается только с учётом возможного загрязнения поверхности жидкости [41]. В этом случае амплитуда Эйлера вкла-

да вблизи поверхности существенно возрастает, см. выражение (12). Найденное значение параметра $\varepsilon = 0.37$, характеризующего упругие свойства загрязнённой поверхности, хорошо согласуется с результатами, ранее представленными в работе [40]. В целом, представленные экспериментальные результаты хорошо описываются существующей теоретической моделью рассматриваемого явления.

Глава 3. Вихревое движение на поверхности мелкой и глубокой воды

3.1 Экспериментальная методика

Подробное описание строения и характеристик экспериментальной установки приведено ранее (см. подраздел 2.1). В данной серии экспериментов плунжеры имеют длину 68 см и располагаются параллельно смежным стенкам ванны на расстоянии около 10 мм от них. Глубина воды в ванне варьировалась в диапазоне от 2 см до 19 см, что позволило исследовать влияние глубины жидкости на формирование вихревого течения. Генерация волн и съёмка видеоматериала синхронизировались, а параметры накачки (амплитуда волн, частота колебаний) и параметры съёмки (частота кадров) задавались с помощью программы MATLAB. Частота колебаний плунжеров составляла 6 Гц.

Для визуализации течений в объёме жидкости использовался порошок полиамида PA-12. Благодаря плотности, лишь незначительно превышающей плотность воды, частицы легко увлекались потоком. Для регистрации движения частиц применялся лазер MGL-N-532-500mW мощностью 0.5 Вт. После прохождения через фокусирующую линзу лазерное излучение формировало вертикальный лазерный лист толщиной около 1 мм. Лазерный лист подсвечивал только те частицы в объёме жидкости, которые пересекали его плоскость, что позволяло визуализировать течение в сечении жидкости. Видеосъёмка подсвеченных частиц осуществлялась с использованием камеры Optronis CP70-1-M-1000 с частотой 24 кадра в секунду.

При обработке полученного видеоизображения использовался пакет PIVlab для MATLAB, позволяющий методом кросс-корреляционной обработки двух изображений получать поле смещений между ними и рассчитывать скорость течения жидкости v и ротор скорости rot, ω .

Энергия вихревых течений на поверхности воды вычислялась по формуле:

$$E_s = \int V^2/2dS \quad (13)$$

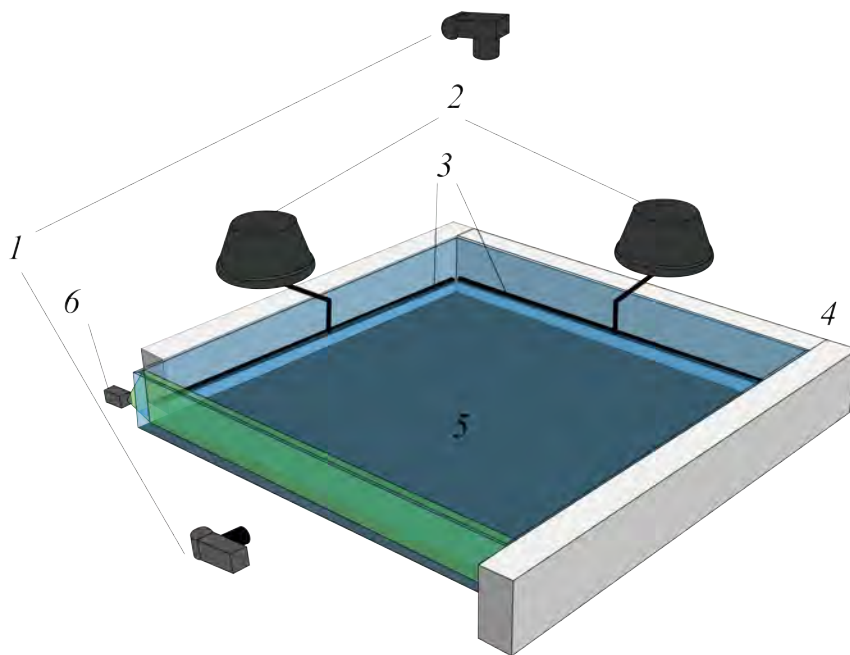


Рис. 15: Схема экспериментальной установки: (1) – камеры, (2) – приводы плунжеров, (3) – плунжеры, (4) – ванна, (5) – вода, (6) – лазер.

где V – скорость течения жидкости.

Энтропия вихревых течений рассчитывалась по формуле

$$\Phi = E_s = \int \Omega^2 dS \quad (14)$$

где $\Phi(t) = \Omega^2$, а $\Omega = \frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x}$, а V_x и V_y – скорости течения жидкости по координатам X и Y .

3.2 Экспериментальные результаты и обсуждение

3.2.1 Генерация вихревого движения на поверхности воды

Глубина слоя воды в разных экспериментах составляла $h = 2, 4, 8, 10, 14$ и 19 см. В настоящем разделе представлены результаты измерений только для двух глубин $h = 2$ см и 19 см, для которых распределения вихревых течений на поверхности различались качественно. Переход от вихревых структур, характерных для мелкой воды, к вихревым структурам, присущим глубокой воде, происходит при глубине воды, равной $h \approx 10$ см. На рисунке 16 приведены типичные треки полиамидных частиц на поверхности воды глубиной 2 и 19 см при примерно одинаковой

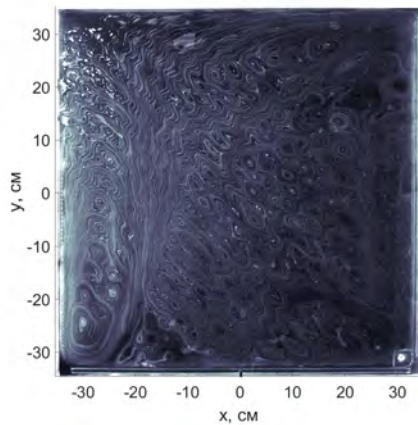
амплитуде волны вблизи плунжеров равной 0.21 и 0.22 мм соответственно.

Следует отметить, что к 19-й секунде на рисунках 16а,б на мелкой и глубокой воде треки полиамидных частиц полностью не демонстрируют выраженной структуры. На 1000-й секунде пространственные структуры на поверхности уже сформировались – наблюдаются крупномасштабные течения. Можно констатировать, что на мелкой воде наблюдается один большой вихрь и несколько смазывающих малых вихрей, а на глубокой воде – два вихря большого размера. Особенно отчётливо это проявляется на рисунке 16д,е, где хорошо видны большие вихри, после того как вихри небольших размеров затухли.

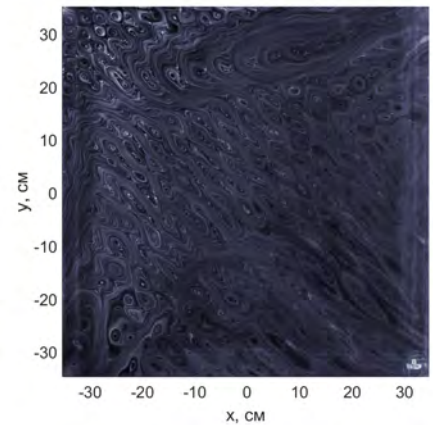
На рисунке 17 представлены распределения энергии и завихренности на поверхности воды глубиной 2 см, полученные через 19-ю и 1000-ю секунды после включения накачки, а также через 300 с после выключения накачки на 1300 с. Разные направления вращения обозначаются разными цветами: желтым - движение по часовой стрелке, синим — против часовой стрелки.

В начальные моменты после включения накачки сформировавшиеся на поверхности структуры представляют собой валы, что свидетельствует об определяющей роли бегущих, не стоячих волн. К 1000-й секунде на поверхности воды формируется крупномасштабный вихрь, который растягивает валы. Энергия сосредоточена, в основном, в крупномасштабном течении. После выключения накачки на поверхности воды доминирует один большой вихрь, что хорошо видно на рисунке 16д. Максимумы энергии расположены по периметру большого вихря, в зонах взаимодействия с затухающими малыми вихрями противоположной завихренности.

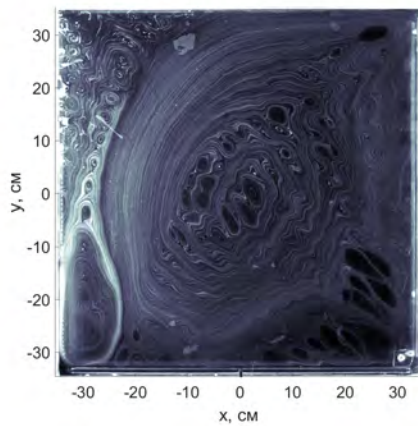
На поверхности воды глубиной 19 см на 19-й и 1000-й секундах после включения накачки видны валы энергии и завихренности, то есть волна частотой 6 Гц существенно затухает на расстоянии пробега от стенки до стенки экспериментальной ванны. На рисунке 18в максимум энергии расположен приблизительно по диагонали ванны в максимуме скорости течения между двумя большими вихрями разной завихренности. После выключения накачки максимум энергии сохраняется между двумя большими затухающими вихрями. Сравнение рисунков 17 и 18 позволяет констатировать, что при равной амплитуде волн накачки на мелкой воде формируется преимущественно один крупномасштабный вихрь, а на глубокой воде – два вихря. На поверхности всегда наблюдаются мелкомасштабные вихри с противоположной завихренностью, такой, чтобы суммарная завихренность на



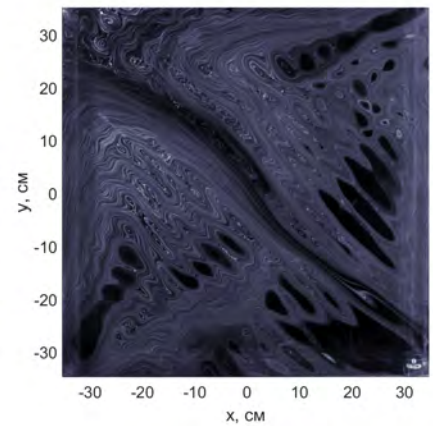
(a)



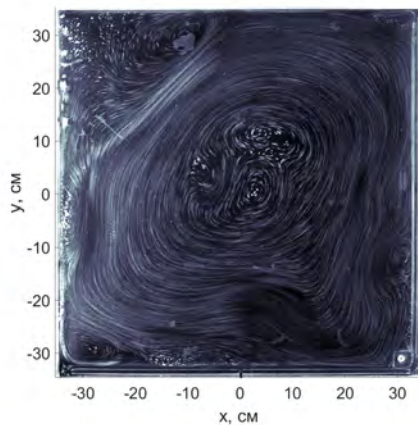
(б)



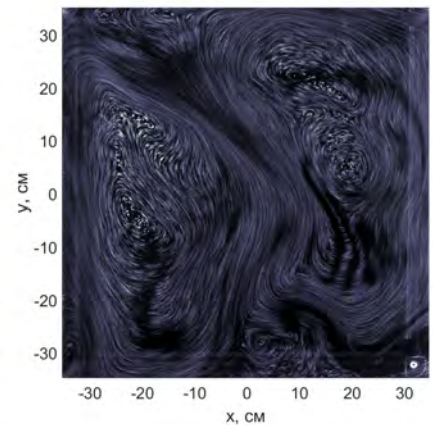
(в)



(г)

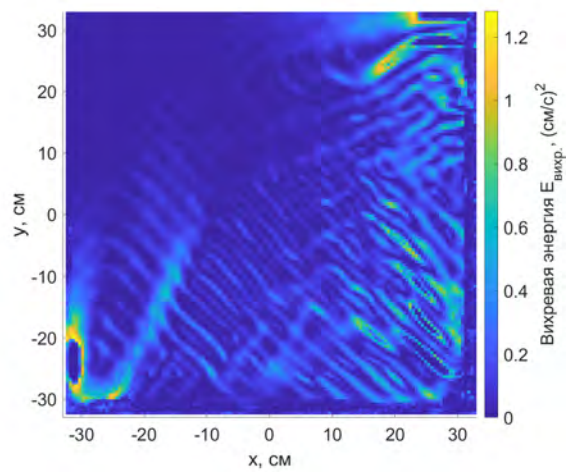


(д)

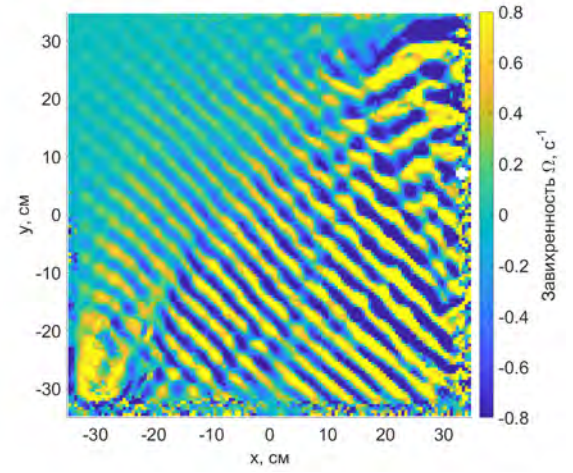


(е)

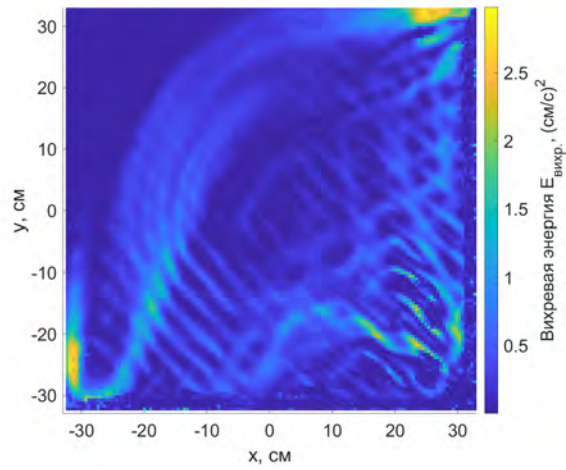
Рис. 16: Треки полиамидных частиц на поверхности воды глубиной 2 см (а, в, д) и 19 см (б, г, е) при возбуждении на поверхности двух перпендикулярных волн частотой 6 Гц и амплитудой 0.21 и 0.22 мм. Треки частиц (а, б) были получены через 19 секунд после включения накачки, (в, г) — через 1000 секунд после её включения, а (д, е) — через 300 секунд после выключения накачки на 1300-й секунде. Здесь и далее плунжеры расположены снизу и справа.



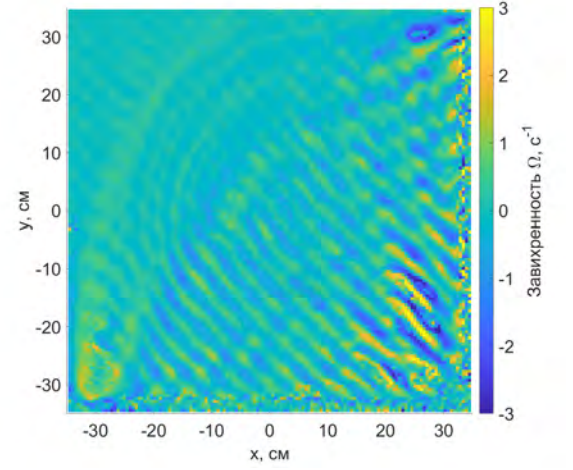
(а)



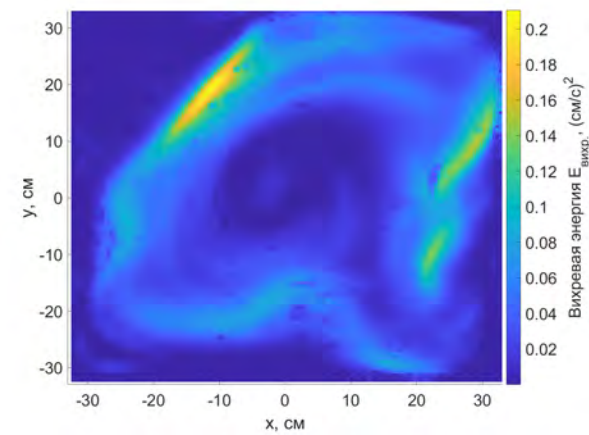
(б)



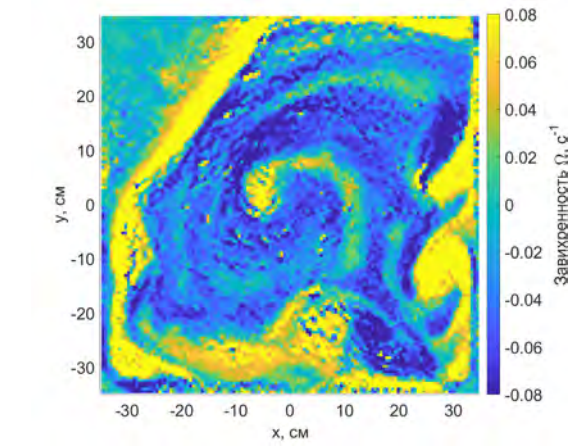
(в)



(г)



(д)



(е)

Рис. 17: Распределения энергии (а, в) и завихренности (б, г) на поверхности воды глубиной 2 см через 19 и 1000 с после включения накачки соответственно. Распределения энергии (д) и завихренности (е) получены через 300 с после выключения накачки на 1300-й секунде.

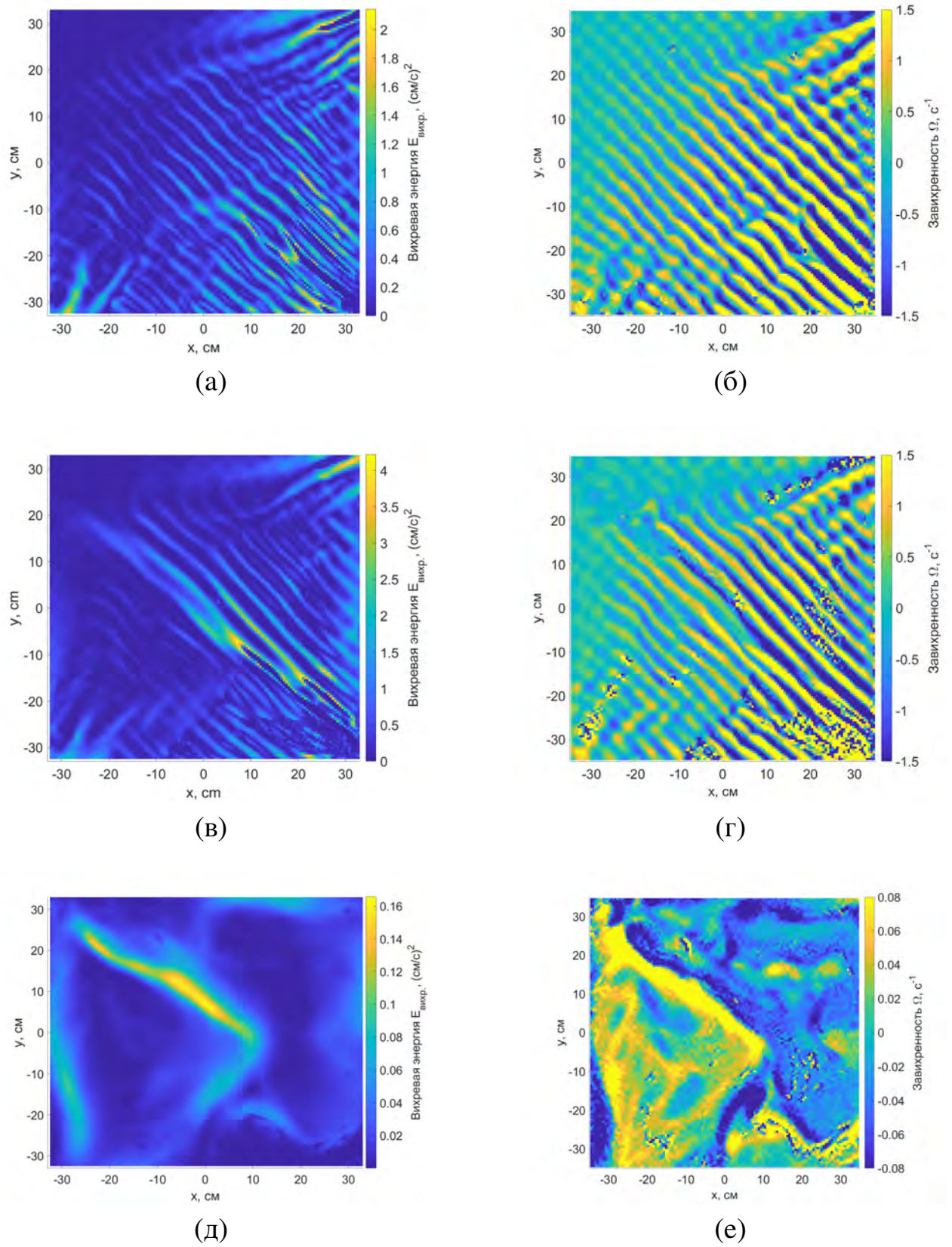


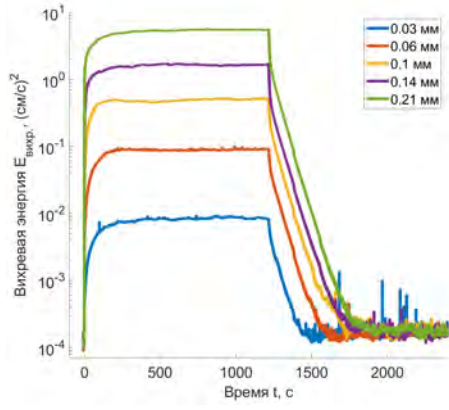
Рис. 18: Распределения энергии (а, в) и завихренности (б, г) на поверхности воды глубиной 2 см через 19 и 1000 с после включения накачки соответственно. Распределения энергии (д) и завихренности (е) получены через 300 с после выключения накачки на 1300-й секунде.

поверхности равнялась нулю.

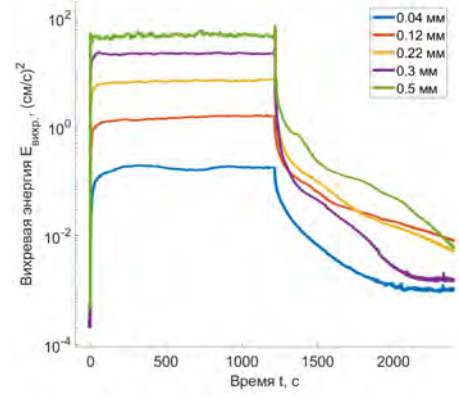
На рисунке 19а,б приведены зависимости полной энергии вихревого движения $E(t)$, рассчитанной по формуле 13, для структур на поверхности жидкости глубиной 2 и 19 см при различных амплитудах волн, возбуждаемых на поверхности воды. На рисунке 19в,г показаны зависимости модуля завихренности от времени $|\Omega(t)|$, рассчитанного по формуле 14. Из рисунков 19 можно заключить, что полная энергия $E(t)$ и модуль завихренности $|\Omega(t)|$ достигают стационарного состояния приблизительно к 500-й секунде. При этом значения вихревой энергии и модуля завихренности флуктуируют около некоторых средних значений.

Сразу после выключения накачки на поверхности воды глубиной 2 см наблюдается быстрое уменьшение энергии и модуля завихренности, рисунки 19а,б. Приблизительно через 30 секунд после выключения накачки энергия затухает по закону, близкому к экспоненциальному, а модуль завихренности уменьшается по более сложному закону, который описывается функцией ошибок (6). На поверхности воды глубиной 19 см после выключения накачки наблюдаются немонотонные зависимости от времени как энергии вихревого движения, так и модуля завихренности, рисунки 19в,г, что связано, по-видимому, с сильным влиянием вихревого течения в объёме жидкости.

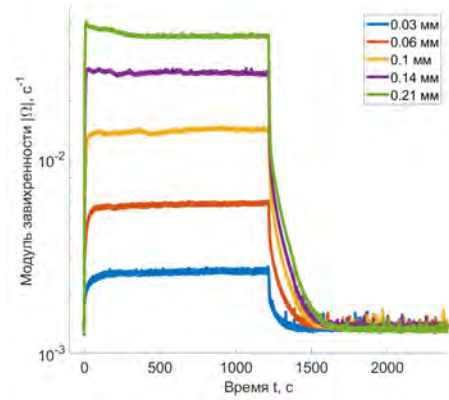
Ниже обсуждается поведение энергии и завихренности в условиях установившегося вихревого движения. На рисунке 20 показаны зависимости средних значений энергии и модуля завихренности в интервале времен от 500 до 1000 с от энергии волн, пропорциональной H^2 , на поверхности воды глубиной 2 и 19 см. Отметим, что средние значения вихревой энергии E_{av} и модуля завихренности $|\Omega|_{av}$ увеличиваются с ростом амплитуды волны накачки H . Поскольку энергия поверхностной волны пропорциональна $E_{wave} \sim H^2$ [13], то из экспериментальных данных можно также оценить изменение отношения вихревой энергии к волновой энергии при переходе от мелкой воды к глубокой, когда на поверхности возбуждаются волны амплитудой 0.21 и 0.22 мм. На рисунке 20 видно, что это отношение составляет 110:1 на поверхности слоя воды глубиной 2 см и немного возрастает до 140:1 на поверхности слоя глубиной 19 см. Возрастание отношения E_{vort}/E_{wave} связано, по-видимому, с уменьшением влияния трения вихрей о дно экспериментальной ванны в результате увеличения глубины слоя жидкости. Об этом же свидетельствуют экспериментальные данные на рисунке 20а,б. Отклонение от линейной зависимости модуля на мелкой воде наблюдается при значениях



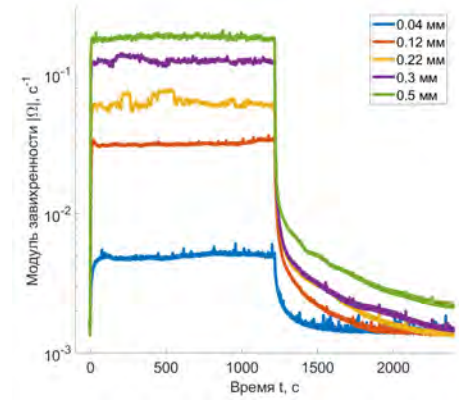
(а)



(б)



(в)



(г)

Рис. 19: Зависимости энергии $E(t)$ (а, б) и модуля завихренности $|\Omega(t)|$ (в, г) от времени. Глубина жидкости составляет 2 см (слева) и 19 см (справа). Амплитуды возбуждаемых на поверхности волн приведены на вставках в правом верхнем углу каждого графика.

H^2 приблизительно вдвое меньших, чем на поверхности глубокой воды.

Завихренность, генерируемая двумя нелинейными взаимно перпендикулярными волнами амплитудой H на поверхности жидкости, может быть записана как [4]:

$$\Omega \sim H^2 \omega k^2 \sin(kx) \sin(ky) \quad (15)$$

где ω - частота волн, k - волновой вектор. Таким образом, завихренность Ω решётки вихрей, генерируемых поверхностными волнами, линейно зависит от волновой энергии. На рисунке 20 в, г хорошо видно, что среднее значения модуля завихренности $|\Omega|_{av}$ линейно возрастает с повышением энергии волн накачки, как это и следует из соотношения (15).

Из качественных соображений (см. зависимость (2)) следует, что энергия вихревой решётки должна квадратично зависеть от энергии волн на поверхности жидкости, $E_{vort} \sim E_{wave}$. Очевидно, что эта зависимость справедлива до тех пор,

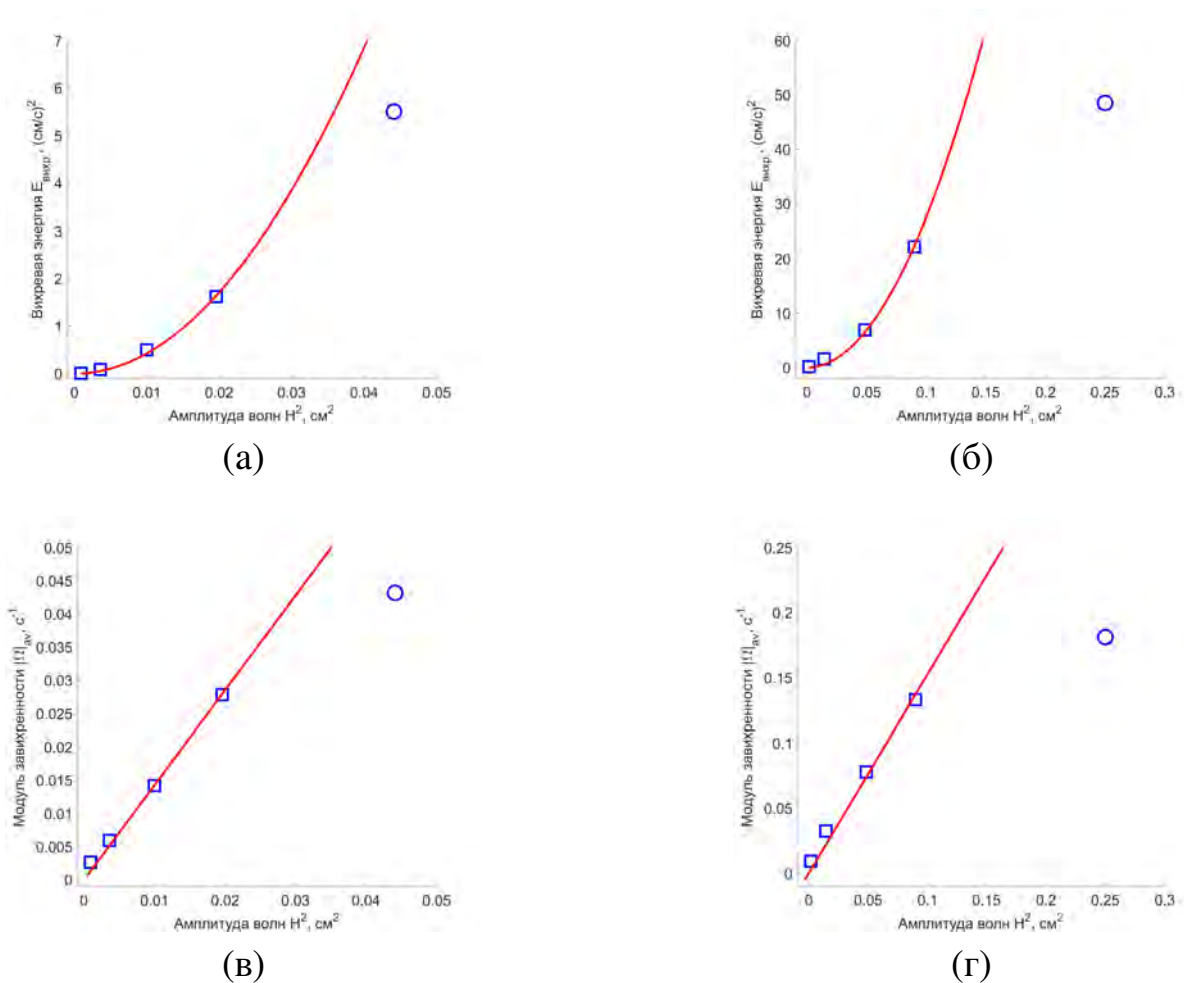
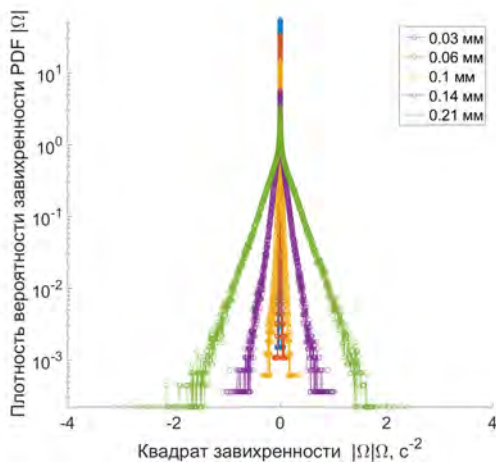


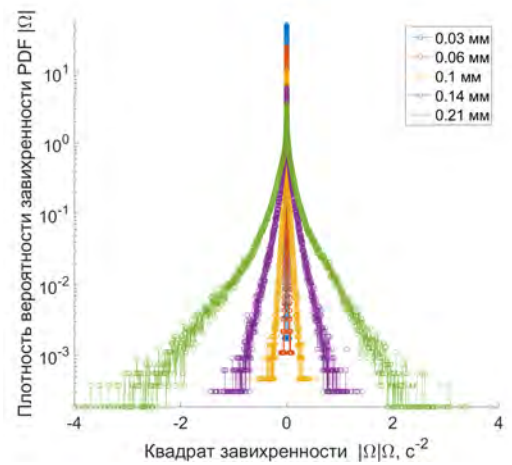
Рис. 20: Зависимости энергии (а, б) и модуля завихренности (в, г) на поверхности воды глубиной 2 и 19 см от энергии волны накачки, пропорциональной H^2 : (а, в) – глубина воды 2 см; (б, г) – глубина воды 19 см.

пока на поверхности не возникает крупномасштабное вихревое течение. На рисунке 20а,б видно, что средние значения энергии вихревого движения E_{vort} имеют более сложную зависимость. При малых амплитудах накачки энергия вихревого движения растет с повышением энергии в волне квадратично, т.е. пропорционально H^4 . На рисунке 20а,б зависимость $E_{\text{wave}} \sim H^4$ показана сплошной кривой. Однако при высоком уровне накачки наблюдается заметное отклонение от квадратичной зависимости, экспериментальные данные показаны на рисунках кружками.

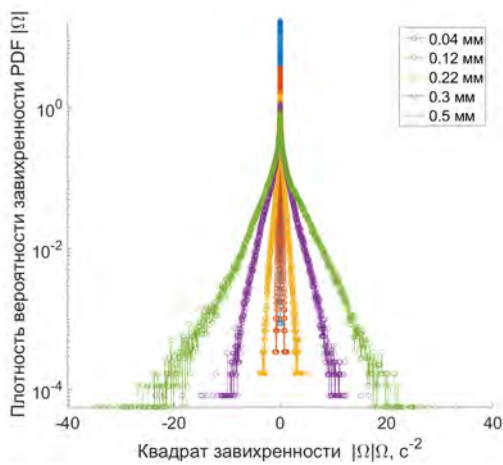
На рисунке 21 представлены функции плотности вероятности (PDF) амплитуд модуля завихренности $|\Omega|$ от квадрата модуля амплитуды $|\Omega|^2$, полученные при разных амплитудах волн накачки. На поверхности жидкости глубиной 2 см к 19-й секунде сформировалось PDF, очень близкое к Гауссову [72]. Оно сохраняется до 1000 секунды. Однако для больших значений амплитуд накачки наблюдаются небольшие отклонения, особенно при возбуждении на поверхности волн амплитудой 0.21 см. На поверхности жидкости глубиной 19 см PDF близки к Гауссову



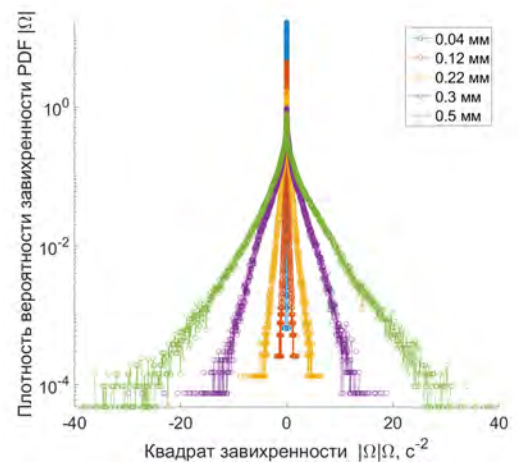
(а)



(б)



(в)



(г)

Рис. 21: PDF квадрата завихренности на поверхности воды через 19 и 1000 секунд после включения накачки: (а, б) – глубина воды 2 см; (в, г) – глубина воды 19 см.

на 19-й и 1000-й секундах при всех амплитудах волн на поверхности.

На рисунке 22 показаны PDF амплитуд энергии для двух глубин при разных амплитудах волн, возбуждаемых на поверхности воды. Оказалось, удобнее представлять PDF энергии как функцию произведения $|V^3|V$, которое учитывает направление течения на двумерной поверхности жидкости. Для слоя воды глубиной 2 см представлены распределения в направлении X, а для слоя воды глубиной 19 см - в направлении Y.

Стрелками на рисунке 22б,г,е показаны средние значения квадрата энергии вихревого движения, которые наблюдаются на поверхности воды в интервале от 500 до 1000 секунды при амплитудах волн, равных $H = 0.03, 0.06$ и 0.04 мм, соответственно (см. рисунок 16).

Нужно отметить, что распределения в направлениях X и Y близки для всех

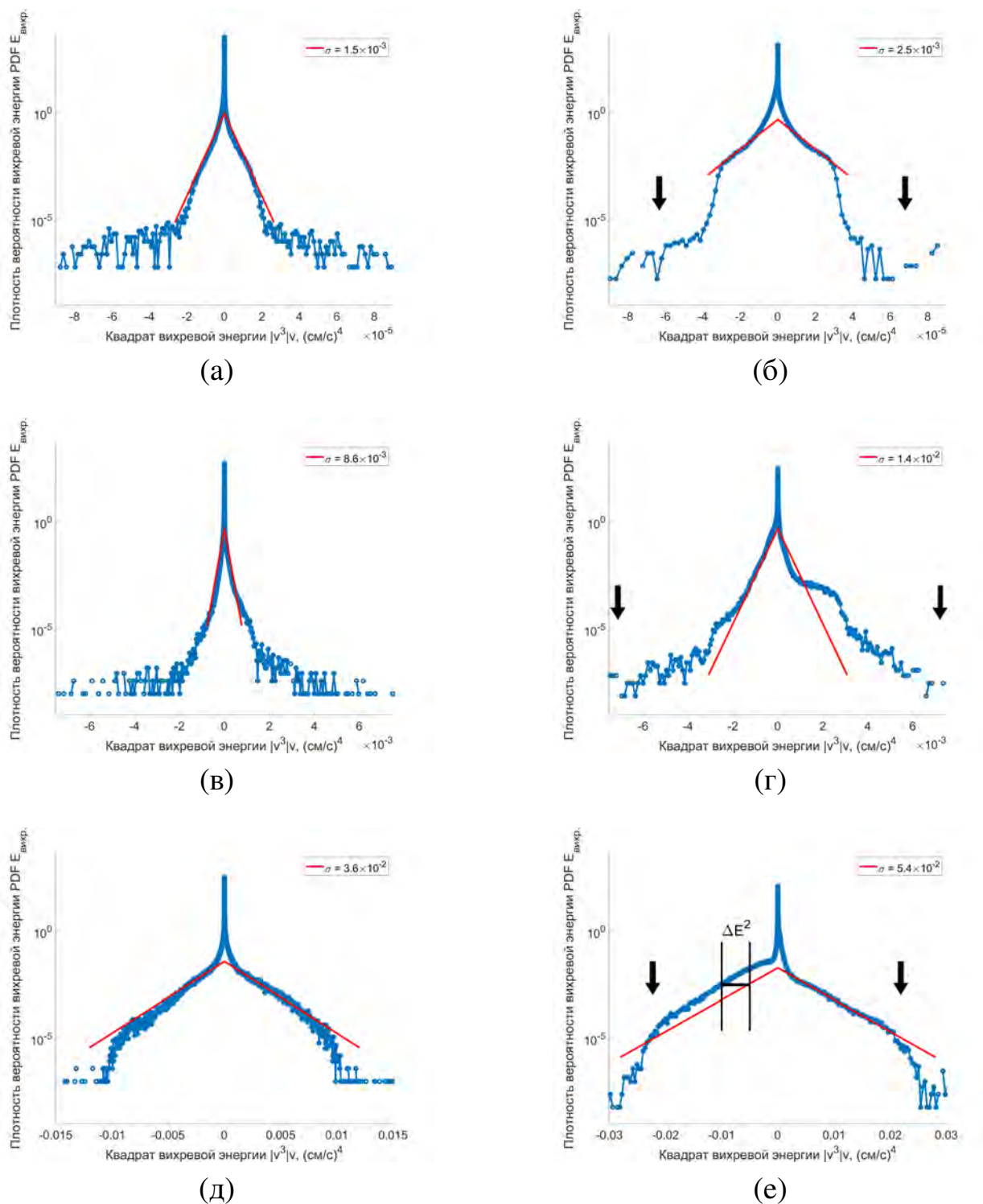


Рис. 22: PDF энергии вихревого движения на поверхности воды через 19 и 1000 с после включения накачки: (а–г) – глубина воды 2 см, амплитуды волн 0.03 и 0.06 мм; (д, е) – глубина воды 19 см, амплитуда волны 0.04 мм.

глубин жидкости. Ограничимся представлением PDF-энергий только для минимальных амплитуд волн накачки, на которых отчётливо наблюдается влияние формирования крупномасштабных вихревых течений. На рисунках сплошные красные линии соответствуют распределению, пропорциональному функции

$$\exp\left(-\frac{|V|^3 V}{\sigma^2}\right)$$

Значения σ представлены на рисунках.

На рисунке 22а представлено PDF энергии на поверхности воды глубиной 2 см, сформировавшееся к 19-й секунде после включения накачки волнами амплитудой 0.03 мм. Распределение является симметричным, но отличается от нормального распределения. Особенно хорошо это видно на рисунке 22б, на котором приведено PDF энергии на 1000-й секунде. Квадрат среднего значения энергии отмечен на рисунке стрелками. Видно, что в результате длительной накачки произошла существенная деформация крыльев PDF, возникли возбуждения в интервале от 2 до 4 (см/с)⁴. PDF на рисунке 22б существенно отличается от нормального распределения. К 1000-й секунде в результате взаимодействия вихревых структур на поверхности начинает формироваться вихрь большего масштаба и система мелких вихрей противоположной завихренности. Оцененное число Рейнольдса [16, 73, 74] для этой вихревой системы составляет $Re \sim \Omega L^2 / 4\nu \approx 50$, где L - длина стороны ванны, ν - коэффициент кинематической вязкости воды. Полученная оценка свидетельствует о том, что вихревая система не находится в развитом турбулентном состоянии.

Увеличение амплитуды волн накачки вдвое до 0.06 мм привело к значительному изменению в PDF энергии. На рисунке 22в,г видно, что к 19 секунде распределение энергии является практически симметричным в интервале $0 - 2 \times 10^{-3}$ (см/с)⁴, а к 1000 секунде энергетические возбуждения уже наблюдаются в интервале $0 - 4 \times 10^{-3}$ (см/с)⁴. Нужно отметить, что PDF не является нормальным. На правом крыле распределения отчётливо видно накопление энергии вблизи 2.5×10^{-3} (см/с)⁴. Оцененное число Рейнольдса для этой вихревой системы составляет $Re \approx 80$. При дальнейшем увеличении амплитуды волн накачки PDF становится более сложным.

Другая картина наблюдается и на поверхности слоя воды глубиной 19 см (рисунок 22д,е). При накачке амплитудой волн, равной 0.04 мм, к 19 секунде формируется почти симметричное PDF энергии. Причем в диапазоне квадратов энергий $0-0.01$ (см/с)⁴ наблюдаемое распределение близко к нормальному. Однако, к 1000 секунде наблюдается значительная деформация PDF. Число Рейнольдса для этой вихревой системы составляет $Re \approx 4 \times 10^2$, т.е. рассматривается развитое турбулентное течение жидкости. Правое и левое плечи распределения по отдель-

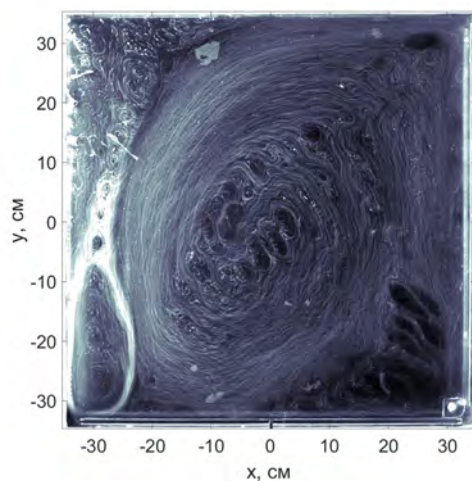
ности хорошо описываются экспоненциальными функциями квадрата энергии E^2 , но сдвинутыми относительно оси Y . Возможной причиной, приводящей к потере симметричности в PDF, может быть формирование крупномасштабных вихрей. Крупномасштабные вихри в экспериментальной ванне располагаются на поверхности воды случайно. Они не являются симметричными по форме и относительно стенок ванны. Именно это обстоятельство приводит к нарушению симметрии PDF. Можно показать, что сдвиг левого плеча PDF относительно правого связан с дополнительной скоростью движения большого вихревого течения в направлении Y . Видно, что сдвиг по оси X составляет приблизительно $0.005 V^4$, при этом средняя азимутальная скорость жидкости близка к ~ 0.07 см/с. При больших амплитудах накачки PDF энергии значительно отличается от нормального, как и в случае мелкой воды. Чтобы понять причины появления немонотонности в PDF при высоких уровнях накачки требуются дополнительные исследования.

Отметим, что в разных экспериментах деформацию распределения Гаусса можно наблюдать как у левого, так правого крыла. Формирование крупномасштабного вихря оказывает меньшее влияние на форму PDF модуля завихренности, так как завихренность сосредоточена, в основном, на малых масштабах - узлах вихревой решётки, а энергия - на больших масштабах в больших вихрях.

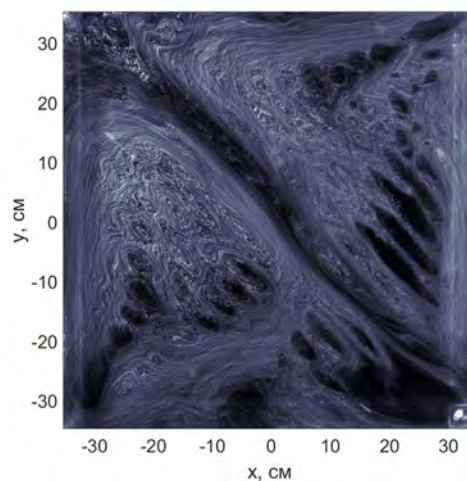
На рисунке 22 видно, что при значениях энергии менее $0.003 (\text{см/с})^2$ на PDF энергии наблюдается острый пик, свидетельствующий о существенном отклонении от распределения Гаусса. Это распределение не удаётся описать экспоненциальной зависимостью. Причиной появления этого пика могут быть слабые течения, обусловленные неконтролируемыми температурными градиентами в объёме и на поверхности воды в экспериментальной ванне. Такое течение может вносить вклад в измеряемую скорость жидкости, причем оно может не быть изотропным.

3.2.2 Особенности затухания вихревого движения на поверхности воды

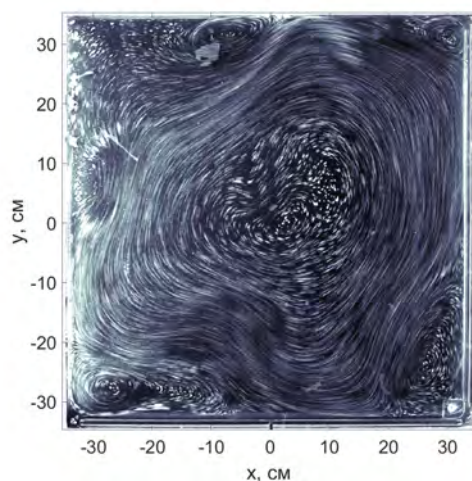
На рисунке 23а изображены фотографии треков полиамидных частиц, полученные через 1200 секунд после включения синусоидального сигнала, подаваемого на приводы плунжеров на частоте 6 Гц. Время накачки было много больше вязкого времени для возбуждаемой волны $\tau = (2\nu k^2)^{-1} = 25$ секунд [13], где ν – коэффициент кинематической вязкости, k – волновой вектор волны частотой 6 Гц. Таким образом, перед выключением накачки состояние вихревого движения можно полагать стационарным. Амплитуда волн на поверхности воды глубиной 2



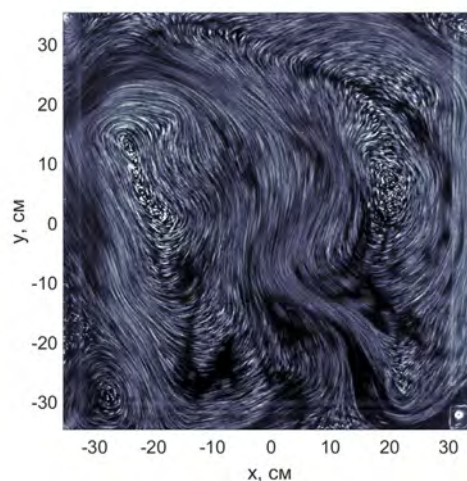
(a)



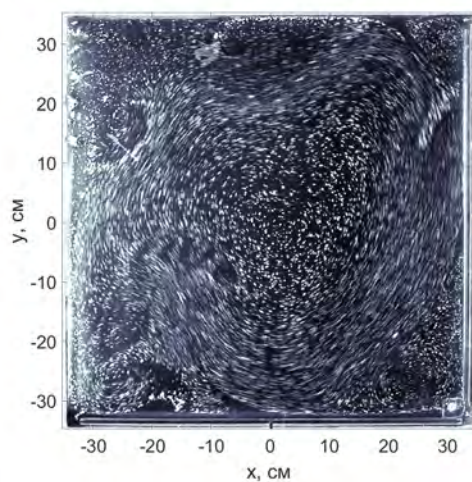
(б)



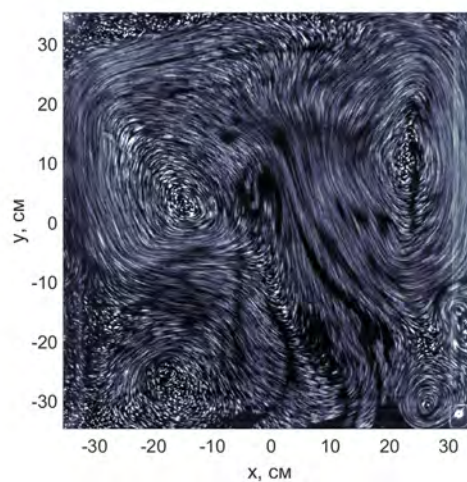
(в)



(г)



(д)



(е)

Рис. 23: Треки полиамидных частиц на поверхности воды глубиной 2 см (а, в, д) и 19 см (б, г, е). Изображения (а) и (б) получены через 1200 секунд после начала накачки, (в) и (г) получены через 60 секунд после выключения накачки, (д) и (е) – через 100 секунд после выключения накачки.

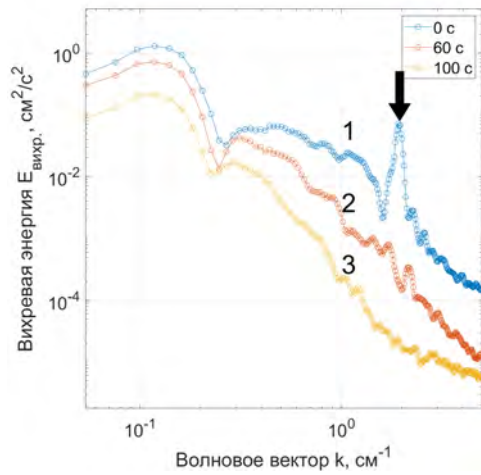
см составляла 0.21 мм. На рисунке 23в показаны треки частиц через 60 секунд, а на рисунке 23д – через 100 секунд после выключения накачки. Отметим, что перед выключением на поверхности воды сформировался один большой вихрь с диаметром близким к длине стороны ванны L . Диаметр вихря значительно больше глубины жидкости, $D \gg h$, то есть вихрь сформировался на поверхности “мелкой воды” и при движении трется о дно ванны. На рисунке 23а видны также малые вихри, сформировавшиеся на масштабе возбуждения волны.

На рисунке 23 показаны треки полиамидных частиц в стационарном состоянии (г), через 60 секунд (д) и через 100 секунд (е) после выключения накачки на поверхности воды глубиной 19 см. Характерный размер вихрей D , на котором наблюдается скорректированное соленоидальное движение, близок к половине длины стороны стенки ванны $D = L/2$. Диаметр вихрей D близок также к глубине жидкости, залитой в ванну. Нужно отметить, что в стационарном состоянии на поверхности наблюдаются два больших вихря и много малых вихрей с характерным размером $\lambda/2$. Характерный размер больших вихрей D близок не только к половине длины стороны стенки ванны $D = L/2$, но к глубине воды h , залитой в ванну.

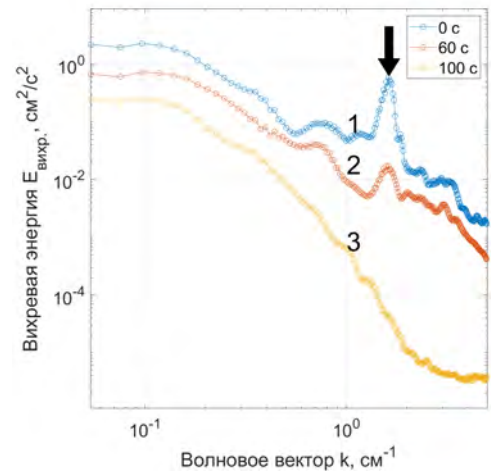
Теперь рассмотрим распределение энергии по волновому вектору $E(k)$ для вихревых состояний, представленных на рисунке 24.

На рисунке 24а накачка, отмеченная стрелкой, производится на волновом числе $1.3 \times \sqrt{2} \text{ см}^{-1}$. Однако видно, что энергия сосредоточена, в основном, на волновом числе 0.1 см^{-1} . Можно заключить, что энергия из области накачки масштаба $\lambda/2$ передается в большие масштабы. Характерные пики на распределении $E(k)$ связаны с формированием вихревого движения поверхностными резонансными модами, которые возникают в результате нелинейного взаимодействия волн [75]. Таким способом энергия передается в область больших масштабов, спектр вихревых движений является дискретным. Это связано, по-видимому, с сильным затуханием волн на поверхности мелкой воды, за исключением нескольких резонансных мод. Отметим, что в диапазоне волновых чисел $0.2\text{-}0.3 \text{ см}^{-1}$ наблюдается локальный минимум энергии, а энергии сосредоточена, в основном, в пике с максимумом на волновом числе близким к 0.1 см^{-1} .

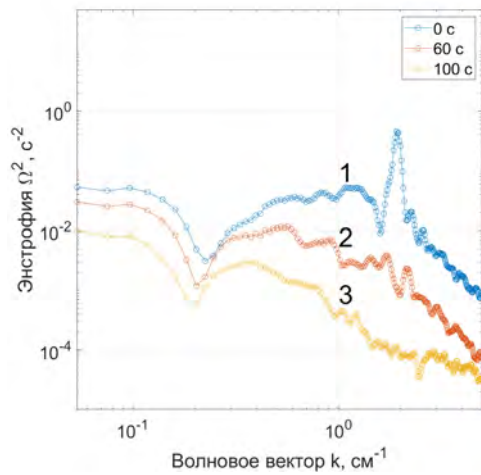
Через 60 секунд после выключения накачки (рисунок 24а, кривая 2) полностью исчез пик на волновом числе $1.3 \times 2 \text{ см}^{-1}$, и энергия уменьшилась более, чем в 10 раз в диапазоне волновых числах $0.3\text{-}5.0 \text{ см}^{-1}$. В то же время высота



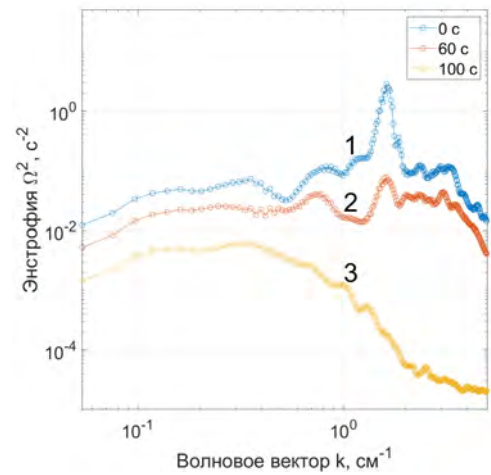
(а)



(б)



(в)



(г)

Рис. 24: Распределения энергии (а, б) и энстрофии (в, г) по волновому числу на поверхности воды глубиной 2 см (а, в) и 19 см (б, г). Кривые 2 и 3 получены через 60 и 100 с после выключения накачки.

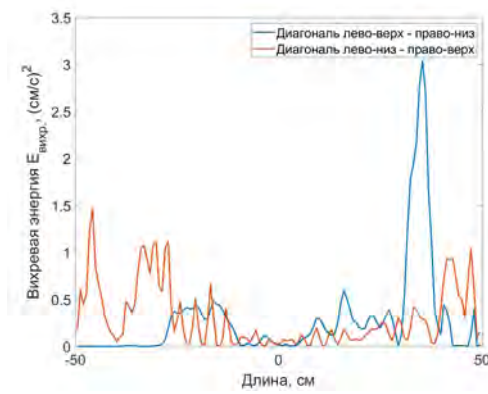
пика на волновом числе 0.1 см^{-1} изменилась всего в два раза. Видно, что через 100 секунд после выключения накачки (рисунок 24а, кривая 3) исчезло вихревое течение с волновыми числами более 0.6 см^{-1} . Таким образом, можно заключить, что после выключения накачки каскад вихревой энергии затухает в диапазоне больших волновых чисел. В диапазоне волновых чисел $0.2-0.3 \text{ см}^{-1}$ наблюдается локальный минимум энергии на всех временах затухания. На распределении энстрофии (рисунок 24в, кривая 2) по волновому числу нужно обратить внимание на наличие локального минимума в диапазоне волновых чисел $0.2-0.25 \text{ см}^{-1}$. Таким образом, можно заключить, что в этом диапазоне отсутствуют значительные вихревые движения.

На рисунке 24б представлено распределение энергии $E(k)$ на поверхности

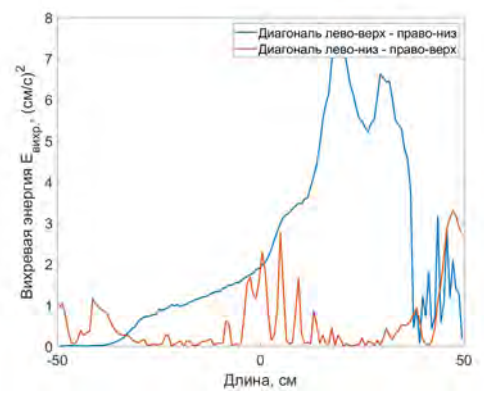
глубокой волны. В стационарном состоянии до выключения накачки, когда энергия вводится в систему вихрей (рисунок 24б кривая 1) отчётливо виден пик на k , равный волновому вектору накачки, умноженному на 2. На рисунке он отмечен стрелкой. Однако основная энергия сосредоточена в пике, с максимумом на волновом числе приблизительно равном 0.1 см^{-1} , т. е. энергия из области накачки передается в область малых волновых векторов. Через 60 секунд после выключения накачки (рисунок 24б, кривая 2) пик на волновом числе накачки полностью исчез. Причиной этого является полное затухание волны частотой 6 Гц. Характерное время затухания энергии такой волны на поверхности воды составляет $\tau/2 = (4\nu k^2)^{-1} = 12.5 \text{ с}$, где ν - коэффициент кинематической вязкости. То есть к 60 секунде поверхностная волна практически полностью затухает. Однако наблюдается каскад энергии в диапазоне волновых чисел $0.1 - 5 \text{ см}^{-1}$. Можно предположить, что в этот промежуток времени в системе вихрей на поверхности воды устанавливается прямой каскад энергии. Энергия передается от больших вихрей в малые, где и затухает из-за вязкого трения. На 100-й секунде (рисунок 24б, кривая 3) наблюдается затухание каскада со стороны больших волновых чисел.

На рисунке 24 показаны спектры энтропии $\Phi(t)$ на мелкой (б) и глубокой воде (г) в стационарном состоянии, кривые 1, и через 60 секунд (кривые 2) и 100 секунд (кривые 3) после выключения накачки. В стационарном состоянии наблюдается пик на волновом числе накачки. На мелкой воде присутствует минимум энтропии в диапазоне $0.2-0.3 \text{ см}^{-1}$, так же, как и в зависимостях $E(k)$. Через 60 секунд после выключения накачки пик на масштабе накачки исчез, но энтропия сосредоточена на волновых векторах более 1 см^{-1} . Через 100 секунд после выключения накачки энтропия на масштабах $>1 \text{ см}^{-1}$ полностью затухла, что связано с сильной диссипацией, в первую очередь, мелкомасштабных течений. Это наблюдение согласуется со спектром энергии $E(k)$ на рисунке 24а, кривая 3.

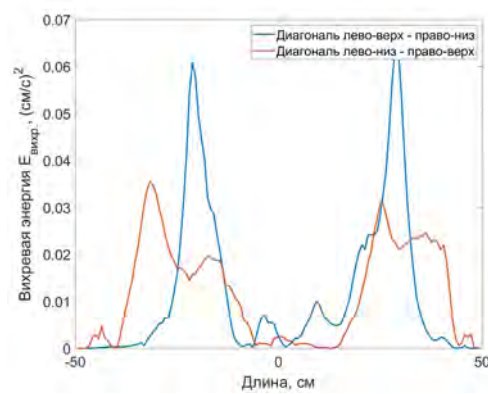
Еще раз обратим внимание на наличие минимума в спектрах энергии $E(k)$ и энтропии $\Phi(k)$ в узком диапазоне волновых чисел $0.2-0.3 \text{ см}^{-1}$ на поверхности мелкой воды. Причина появления этой особенности заключается, по-видимому, в формировании на мелкой воде кольцеобразного вихря. Такой вихрь виден на рисунке 23а. Он занимает площадь всей ванны. На рисунке 25а приведено распределение энергии течения мелкой жидкости по прямым, проходящим через центр вихря. В стационарном состоянии энергия распределена по всему диаметру, вдали от центра энергия выше, чем в центре. На глубокой воде (рисунок 25б) энергия



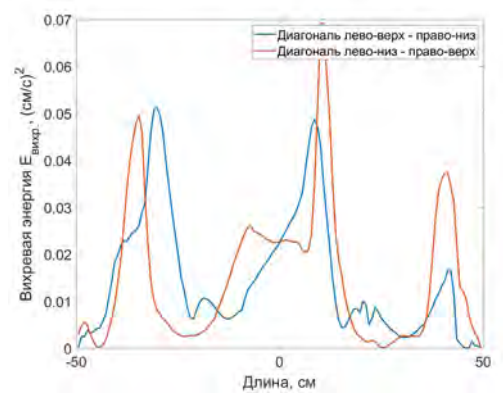
(а)



(б)



(в)



(г)

Рис. 25: Распределения вихревой энергии вдоль диагонали ванны на поверхности мелкой воды (а, в) и глубокой воды (б, г). Изображения (а, б) соответствуют стационарному состоянию при включённой накачке, изображения (в, г) – через 60 с после её выключения.

сосредоточена в центре ванны и в её углах. Через 60 секунд после выключения накачки на мелкой воде наблюдаются два максимума энергии в распределении по диагонали, рисунок 25в, которые соответствуют большому кольцеобразному вихрю. В середине ванны амплитуда энергии значительно меньше. Характерный масштаб этого пятна примерно 20-25 см, что соответствует волновому числу около 0.25 см^{-1} , при котором наблюдается минимум на рисунке 25а. Этот вихрь не является когерентным, так как не имеет постоянного распределения энергии по радиусу [76, 77, 78].

На глубокой воде после выключения накачки, рисунок 25г, на распределении наблюдаются четыре максимума, которые соответствуют двум вихрям на рисунке 23д. Хорошо видно, что энергия сосредоточена в центре ванны и на периферии. Два минимума энергии, которые соответствуют кору (центральная область) вихрей располагаются по обе стороны от центра ванны. Ширина минимумов составляет 10-15 см, или $0.4\text{-}0.6 \text{ см}^{-1}$ в обратном пространстве. Примерно в этом интервале

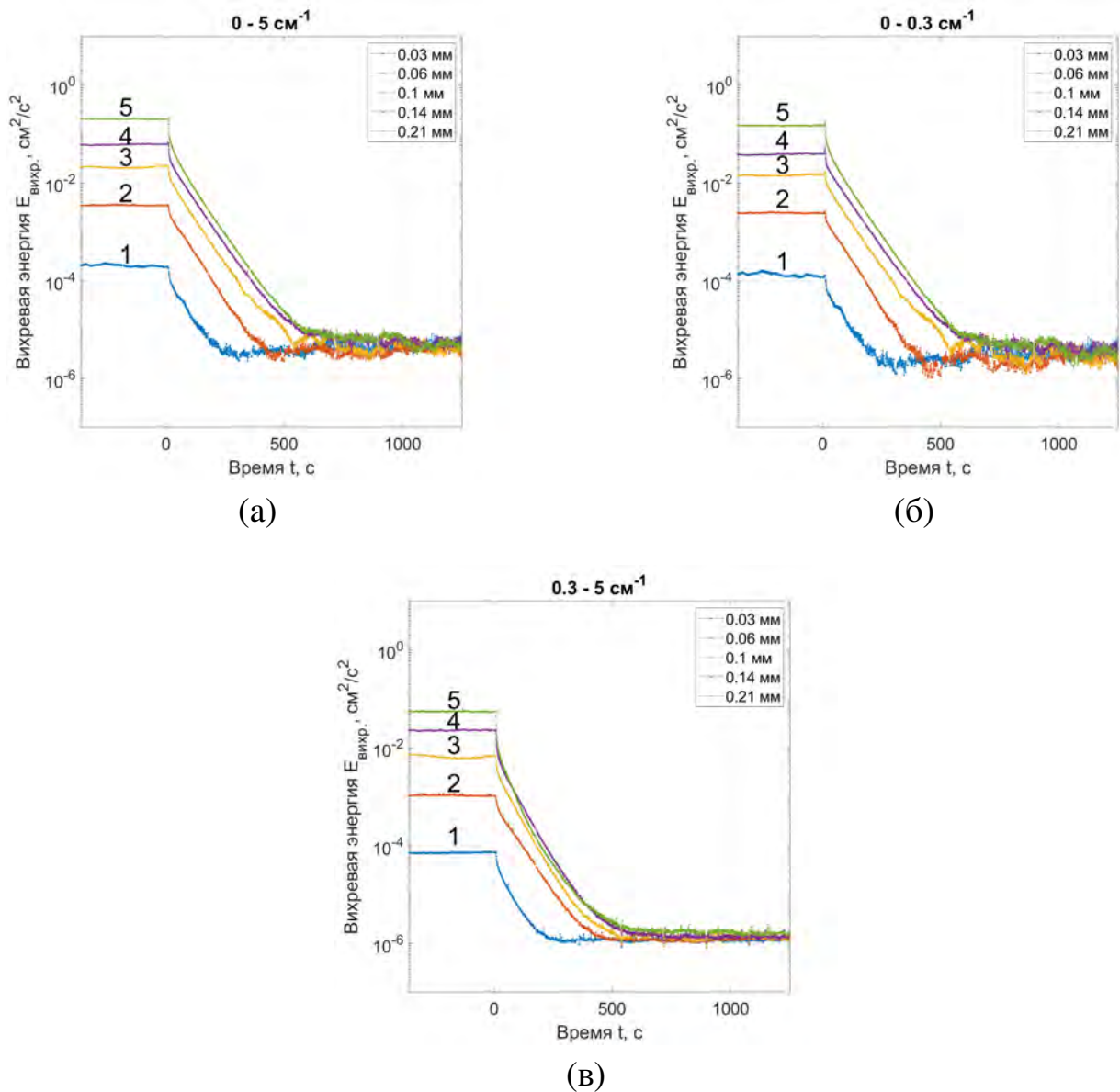
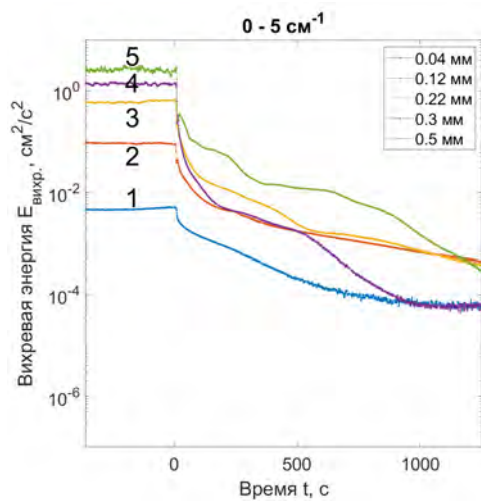


Рис. 26: Зависимости энергии вихревого движения $E_k(t)$ в диапазонах волновых чисел: (а) $0-5 \text{ cm}^{-1}$, (б) $0-0.3 \text{ cm}^{-1}$, (в) $0.3-5 \text{ cm}^{-1}$ от времени при постоянной накачке волнами разной амплитуды и после её выключения на глубине 2 см. Момент выключения накачки соответствует нулевой минуте.

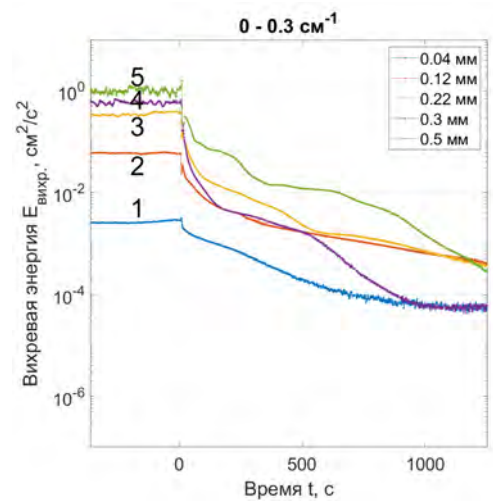
на распределении $E(k)$ (рисунок 25б) и наблюдаются небольшие особенности.

Обратимся теперь к зависимостям от времени энергии и энтропии вихревого движения после выключения накачки.

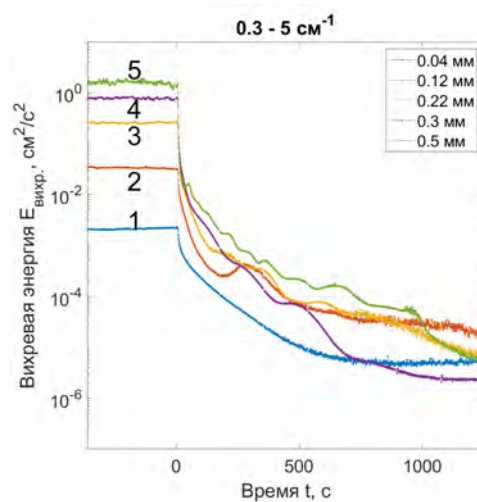
На рисунке 26а приведена зависимость энергии вихревого движения в диапазоне волновых чисел $0-5 \text{ cm}^{-1}$ от времени $E_k(t)$ после выключения накачки при разных амплитудах волн накачки. Нужно отметить, что энергия вихревого движения затухает по экспоненциальному закону с характерным временем, равным $\tau_\varepsilon \sim 58$ секунд при всех амплитудах накачки. Это время превосходит в 16 раз время затухания энергии волны в результате вязких потерь в объёме жидкости. При малой амплитуде волн зависимость $E_k(t)$ также близка к экспоненциальной.



(a)



(б)



(в)

Рис. 27: Зависимости энергии вихревого движения $E_k(t)$ в диапазонах волновых чисел: (а) $0-5 \text{ см}^{-1}$, (б) $0-0.3 \text{ см}^{-1}$, (в) $0.3-5 \text{ см}^{-1}$ от времени при постоянной накачке волнами разной амплитуды и после её выключения на глубине 19 см. Момент выключения накачки соответствует нулевой минуте.

В диапазоне волновых чисел $0-0.3 \text{ см}^{-1}$ наблюдается экспоненциальная зависимость $E_k(t)$ с характерным временем, близким к $\tau_3 \sim 58 \text{ с}$. В диапазоне больших волновых чисел $0.3-5 \text{ см}^{-1}$ энергия также затухает по экспоненциальному закону с характерным временем, близким к $\tau_3 \sim 49 \text{ секунд}$. Отметим, что абсолютные значения энергии в этом диапазоне в несколько раз меньше, чем в диапазоне $0-0.3 \text{ см}^{-1}$, т.е. энергия сосредоточена на больших масштабах. Сравнение экспериментальных графиков, представленных на рисунке 26, позволяет заключить, что на поверхности мелкой воды энергия вихревого движения сосредоточена, в основном, в больших вихрях. Они же, как видно, доминируют на рисунке 23. Можно сделать вывод, что затухание вихревого движения на мелкой воде в экспериментах

обусловлено трением о дно ванны. Это довольно удивительно: вихри на поверхности мелкой жидкости живут много дольше волн, которые их сформировали.

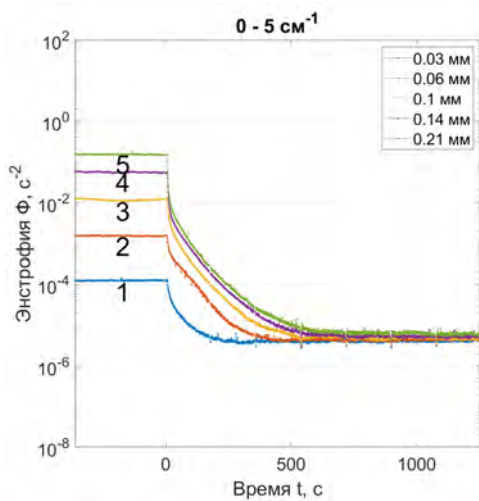
На поверхности глубокой воды затухание энергии вихревого движения кардинально отличается от экспоненциального процесса на поверхности мелкой воды. На рисунке 27 приведены зависимости от времени затухания энергии в трёх диапазонах волновых чисел: $0-5 \text{ см}^{-1}$ (а), $0-0.3 \text{ см}^{-1}$ (б) и $0.3-5 \text{ см}^{-1}$ (в) при разных уровнях исходной накачки. Во-первых, отчётливо видно, что затухание энергии не носит экспоненциального характера: зависимости $E_k(t)$ немонотонны и пересекаются. Во-вторых, зависимости $E_k(t)$ в диапазонах волновых чисел $0-5 \text{ см}^{-1}$ и $0-0.3 \text{ см}^{-1}$ подобны и близки по абсолютным значениям. Можно констатировать, что затухающая энергия также сосредоточена на больших масштабах. В диапазоне $0.3-5 \text{ см}^{-1}$ при амплитуде волн накачки, равной 0.5 мм, можно видеть процессы возрастания энергии в двух временных интервалах. Причиной этому могут быть вихревые течения в объёме жидкости, которые отдают часть своей энергии поверхностным структурам в результате нелинейного взаимодействия.

Рассмотрим теперь затухание энтрофии после выключения накачки.

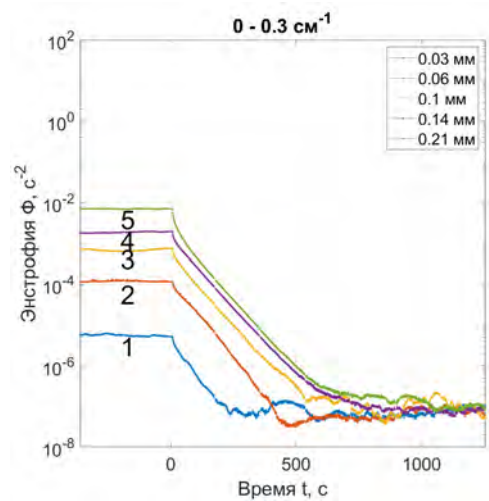
На рисунке 28а показана зависимость энтрофии $\Phi(t)$ в диапазоне волновых векторов $0-5 \text{ см}^{-1}$ от времени $\Phi(t)$ после выключения накачки при разных амплитудах волн. Нужно отметить, что зависимость затухания энтрофии $\Phi(t)$ не может быть описана экспоненциальной функцией во всём диапазоне волновых чисел.

Однако в диапазоне $0-0.3 \text{ см}^{-1}$ экспериментальные кривые хорошо аппроксимируются экспоненциальной функцией с характерным временем, близким к $\tau_\Phi \approx 59 \text{ с}$ (рисунок 28б). Это время существенно превосходит время вязкого затухания волны τ и близко к характерному времени затухания энергии τ_ϵ . Отметим также, что абсолютные значения энтрофии в диапазоне волновых векторов $0-0.3 \text{ см}^{-1}$ более чем в 10 раз меньше аналогичных значений в диапазонах $0-5 \text{ см}^{-1}$ и $0.3-5 \text{ см}^{-1}$ и затухают они не экспоненциально. То есть можно заключить, что энтрофия сосредоточена на масштабах волновых чисел более 0.3 см^{-1} , а экспоненциальный характер зависимости $\Phi(t)$ относится только к вихрям большого масштаба. Отметим, что в больших вихрях также сосредоточена энергия. Поэтому времена затухания энтрофии и энергии совпадают, так как $\Phi = \Omega^2 \sim V^2 \sim E$.

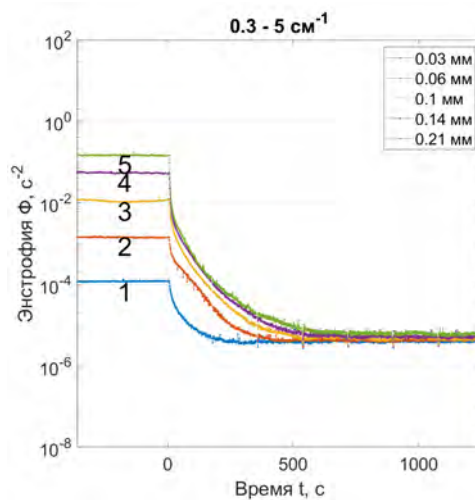
В диапазоне волновых векторов $0.3-5 \text{ см}^{-1}$ (масштаб вихрей менее длины стороны ванны) наблюдается более быстрое затухание завихренности по закону отличному от экспоненциального. Такое поведение естественно, так как малые



(a)



(б)

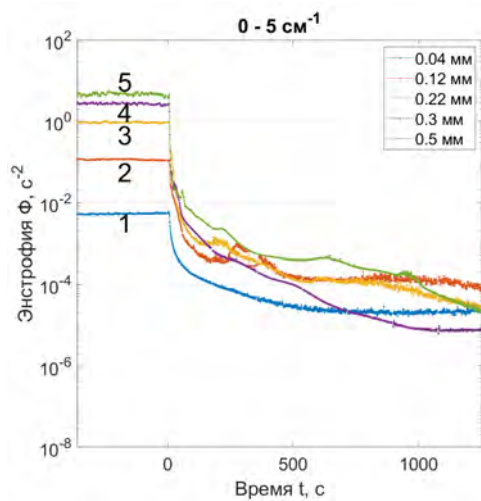


(в)

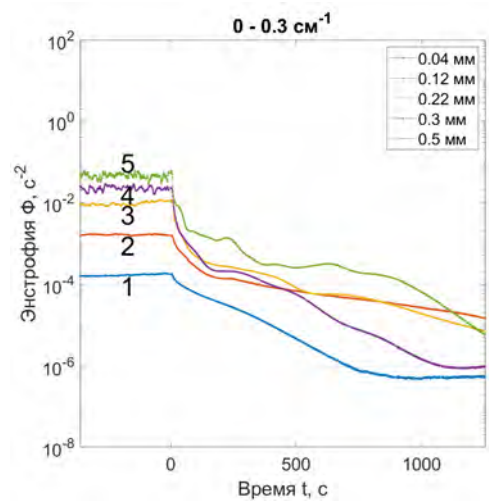
Рис. 28: Зависимости энтропии вихревого движения $\Phi(t)$ в диапазонах волновых чисел: (а) $0-5 \text{ см}^{-1}$, (б) $0-0.3 \text{ см}^{-1}$, (в) $0.3-5 \text{ см}^{-1}$ от времени при постоянной накачке волнами разной амплитуды и после её выключения на глубине 2 см. Момент выключения накачки соответствует нулевой минуте.

вихри затухают быстрее больших в силу вязких потерь в объёме жидкости.

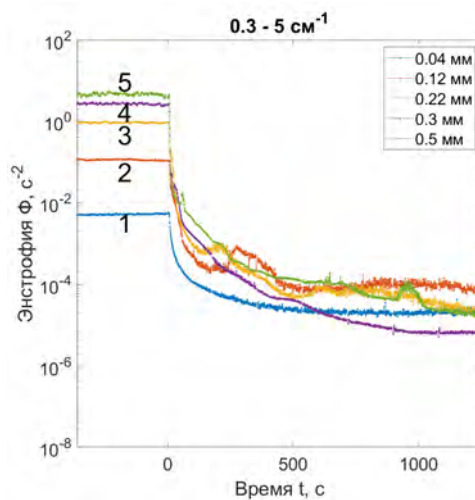
На рисунке 29а представлена зависимость от времени энтропии $\Phi(t)$ на поверхности глубокой воды в диапазоне волновых векторов $0-5 \text{ см}^{-1}$. После выключения накачки наблюдается резкое монотонное уменьшение энтропии за время около 10 с. Затем процесс затухания проходит очень медленно. В диапазоне волновых чисел $0-0.3 \text{ см}^{-1}$ (рисунок 29б) при малой амплитуде волн на поверхности экспериментальная кривая 1 может претендовать на экспоненциальную зависимость и качественно близка к зависимостям $\Phi(t)$ на поверхности мелкой воды (рисунок 29б). Однако при больших амплитудах волн видно, что зависимости $\Phi(t)$ довольно далеки от экспоненциальных и отличаются от зависимостей $\Phi(t)$, по-



(a)



(б)

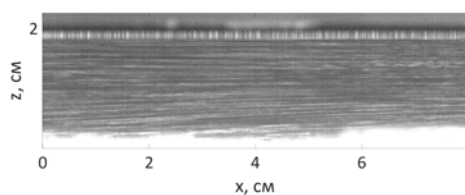


(в)

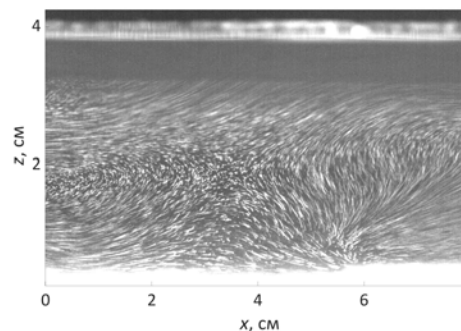
Рис. 29: Зависимости энтропии вихревого движения $\Phi(t)$ в диапазонах волновых чисел: (а) $0-5 \text{ см}^{-1}$, (б) $0-0.3 \text{ см}^{-1}$, (в) $0.3-5 \text{ см}^{-1}$ от времени при постоянной накачке волнами разной амплитуды и после её выключения на глубине 19 см. Момент выключения накачки соответствует нулевой минуте.

лученных на мелкой воде. В диапазоне волновых чисел $0.3-5 \text{ см}^{-1}$ зависимости $\Phi(t)$ близки к зависимостям, представленным на рисунке 29а. Нужно отметить, что значение энтропии в диапазоне $0-0.3 \text{ см}^{-1}$ почти на два порядка меньше значения энтропии в диапазоне $0.3-5 \text{ см}^{-1}$.

Таким образом, можно заключить, что энтропия сосредоточена в основном на малых масштабах (в малых вихрях). Немонотонное поведение энтропии во всём диапазоне волновых чисел $0-5 \text{ см}^{-1}$ обусловлено взаимодействием крупномасштабных поверхностных вихревых течений с вихрями в объёме жидкости.



(a)



(б)

Рис. 30: Треки полиамидных частиц в объёме воды глубиной 2 см (а) и 4 см (б) через 600 секунд после включения накачки. Амплитуда волны накачки равна 0.21 мм

3.2.3 Экспериментальное наблюдение перехода от двумерного к трёхмерному турбулентному вихревому течению воды

В данном разделе представлены результаты измерений для глубин $h = 2$ см и 4 см. На рисунке 30 представлены треки полиамидных частиц в вертикальном лазерном листе в объёме воды глубиной 2 (а) и 4 (б) см через 375 и 600 секунд после включения накачки соответственно. Амплитуды волн накачки были одинаковыми: на поверхности плунжерами возбуждались волны амплитудой 0.21 мм. Стоит обратить внимание на принципиальные отличия в характере движения воды, представленного на треках. В объёме мелкой воды, рисунок 30а, треки полиамидных частиц вытянуты по горизонтали, что свидетельствует о ламинарном характере течения: вихревого движения не наблюдается. В то же время в объёме глубокой воды, рисунок 30б, треки полиамидных частиц носят сложный характер, прекрасно видны многочисленные вихревые траектории, что свидетельствует о турбулентном характере течения жидкости.

На рисунке 31 представлены распределения завихренности в объёме жидкости, полученные в разные моменты времени после включения накачки на глубине 4 см. Синий и жёлтый цвета соответствуют завихренностям противоположного направления перпендикулярно плоскости рисунка. Сплошными линиями со стрелками отмечено направление течения жидкости, связанное с вращением большого вихря, сформировавшегося в экспериментальной ванне. На рисунке наблюдаются вихри с размерами в несколько сантиметров. Следует отметить присутствие мелких вихрей как в объёме, так и вблизи поверхности жидкости. Отчётливо видно, что в хаотическом движении участвует весь объем жидкости.

Средняя скорость движения полиамидных частиц V в объёме воды, обу-

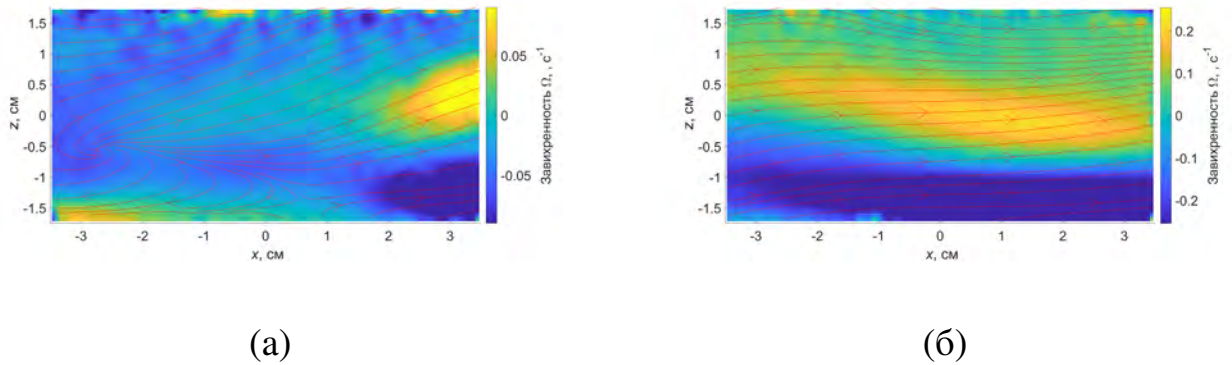


Рис. 31: Распределения завихренности по вертикали в объёме жидкости глубиной 4 см. Накачка волнами амплитудой 0.21 мм. Распределения были получены через 375 (а) и 600 (б) секунд после включения накачки.

словленная вращением большого вихря, усредненная за время около 1000 секунд, составляет по порядку величины 1 см/с. Таким образом, число Рейнольдса составляет $Re = \nu h / \nu \sim 400$, где ν – кинематическая вязкость воды, равная 0.01 см²/с, а h – глубина воды, равная 4 см.

Известно, что при таких значениях числа Рейнольдса движение жидкости становится турбулентным и в объёме формируется множество вихрей [73]. Около дна экспериментальной ванны скорость течения жидкости равна нулю, тогда как вблизи поверхности жидкости достигает максимального значения.

В случае жидкости глубиной 2 см трение волн длиной 5.6 см о дно экспериментальной ванны становится существенным [13]. Средняя скорость течения падает, и поэтому течение становится ламинарным.

Из представленных экспериментальных результатов следует, что в объёме воды глубиной 2 см имеем дело с двумерной турбулентностью – вектор завихренности направлен перпендикулярно поверхности жидкости. При увеличении глубины воды до 4 см завихренность становится трёхмерной – вектор завихренности соленоидальных течений имеет компоненты в трёх x , y , z — направлениях. Можно заключить, что в данных экспериментах при увеличении глубины воды с 2 см до 4 см наблюдается переход от двумерной к трёхмерной турбулентности.

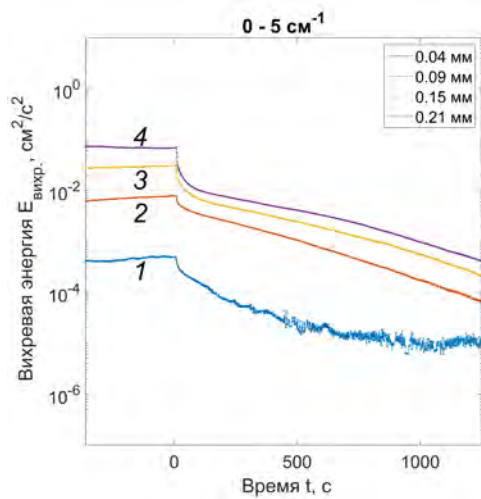
Обратимся к рисунку 26, где представлены зависимости энергии вихревого движения на поверхности воды глубиной 2 см от времени $E(t)$ при разных амплитудах волн накачки. Во всех интервалах волновых векторов наблюдается хорошая экспоненциальная зависимость затухания энергии вихревого движения от времени, $E(t) \sim \exp(-t/\tau_{vort})$. Оцененное характерное время затухания вих-

ревой энергии (кривая 5 на рисунке 26б) составляет приблизительно $\tau_{vort} \approx 65$ секунд.

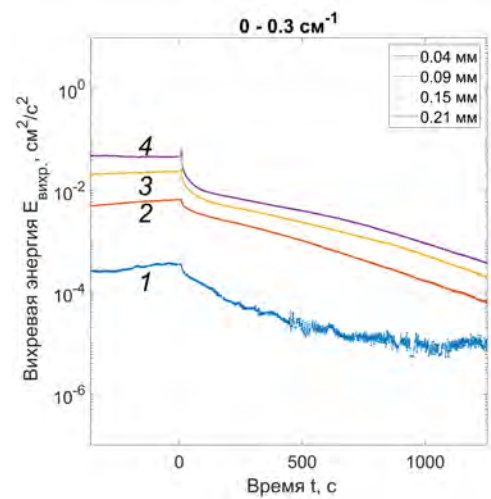
Характерное время вязкого затухания энергии генерируемой волны на поверхности воды составляет $\tau_w = (2\nu k^2)^{-1} = 29$ секунд. Поэтому можно констатировать, что волновая система не определяет динамику затухания соленоидального движения, так как к 60 секунде поверхностная волна практически полностью затухает. Однако наблюдается затухание энергии в диапазоне волновых векторов $0 \text{ см}^{-1} - 5 \text{ см}^{-1}$ на временах существенно более 60 секунд. В этот промежуток времени в системе вихрей на поверхности воды наблюдается прямой каскад энергии (см. рисунок 24). Энергия передается от больших вихрей к малым, где и затухает из-за вязкого трения.

На рисунке 32 представлены зависимости энергии вихревого движения на поверхности воды глубиной 4 см от времени $E(t)$ после выключения накачки. Отчётливо видно, что затухание энергии происходит не по экспоненциальному закону. Затухание энергии до уровня 10^{-6} длится гораздо дольше, чем на поверхности воды глубиной 2 см. На причину такого длительного затухания энергии указывают немонотонные зависимости $E(t)$ в интервале волновых векторов $0.3-5 \text{ см}^{-1}$. Возрастание энергии на кривой 4 может быть обусловлено потоком энергии из системы вихрей, сформировавшихся в объёме жидкости. Из сравнения рисунка 32а-в можно заключить, что энергия в поверхностное вихревое течение поступает в диапазоне волновых векторов более 0.3 см^{-1} .

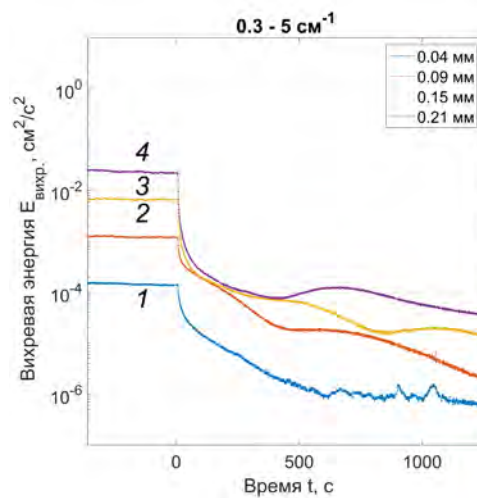
По-видимому, в поверхностную энергию течения вносят вклад, в основном, малые вихри, завихренность которых хорошо видна под поверхностью воды на рисунке 30. Эти вихри в объёме жидкости глубиной 4 см передают энергию вихревым течениям на поверхности в результате их нелинейного взаимодействия. В объёме мелкой воды вектор завихренности вихревого течения направлен по оси, перпендикулярной поверхности. Вихри с компонентой вектора завихренности, параллельной поверхности, отсутствуют из-за сильного трения о дно ванны, поэтому дополнительная энергия не поступает в поверхностные соленоидальные течения. Отметим, что ранее переход от ламинарного течения к трёхмерному турбулентному режиму наблюдался в слоях электролита при длительной накачке постоянным электрическим током [9].



(a)



(б)



(в)

Рис. 32: Зависимости энергии вихревого движения $E_k(t)$ в диапазонах волновых чисел: (а) $0-5 \text{ см}^{-1}$, (б) $0-0.3 \text{ см}^{-1}$, (в) $0.3-5 \text{ см}^{-1}$ от времени при постоянной накачке волнами разной амплитуды и после её выключения на глубине 4 см. Момент выключения накачки соответствует нулевой минуте.

3.3 Выводы

Экспериментально установлено, что структура вихревых течений, формируемая нелинейными волнами на поверхности жидкости, определяется её глубиной. На мелкой воде один большой вихрь доминирует над несколькими мелкими вихрями с противоположной завихренностью. На глубокой воде, как правило, возникают два больших вихря с противоположной завихренностью. PDF модуля завихренности хорошо описываются на начальных временах Гауссовой функцией при всех амплитудах волн накачки. Однако PDF энергии при малых амплитудах волн накачки на поверхности мелкой воды отличается от нормального распределения. На поверхности глубокой воды на начальных временах накачки PDF энергии близ-

ки к нормальному, но при больших временах накачки наблюдается деформация PDF в результате возникновения на поверхности жидкости крупномасштабных вихревых течений.

В результате проведенных исследований установлено, что затухание энергии и энстрофии на поверхности мелкой и глубокой воды существенно отличаются. На поверхности мелкой воды при накачке волнами формируется один большой вихрь. После выключения накачки затухание вихревого движения обусловлено трением о дно экспериментальной ванны, а зависимости $E(t)$ и $\Phi(t)$ при всех уровнях накачки экспоненциальные и не имеют точек пересечения.

На поверхности глубокой воды при накачке формируются два больших вихря. После выключения накачки экспоненциальная зависимость наблюдается только для энергии $E(t)$ в диапазоне волновых чисел $0-0.3 \text{ см}^{-1}$ при всех амплитудах волн накачки. В остальных диапазонах волновых чисел и при всех уровнях накачки зависимости $E(t)$ и $\Phi(t)$ немонотонны и пересекаются, что свидетельствует о сильном взаимодействии поверхностных вихрей с объёмными соленидальными течениями, что приводит к перераспределению энергии и энстрофии.

Экспериментально установлено, что на поверхности мелкой воды глубиной 2 см перпендикулярные стоячие волны формируют двумерное вихревое турбулентное состояние с вектором завихренности, направленным перпендикулярно к поверхности жидкости. При увеличении глубины воды до 4 см наблюдается переход турбулентности в трёхмерный режим.

Глава 4. Формирование распределения Парето в системе кластеров полиамидных частиц на поверхности воды

4.1 Экспериментальная методика

Процедура проведения эксперимента по генерации вихревого течения волнами и визуализации потоков на поверхности жидкости приведена ранее (см. подразделы 2.1 и 3.1). В настоящих экспериментах по кластеризации частиц полиамида-12 на поверхности воды использовалась ванна размером 70×70 см. Частицы полиамида распылялись над поверхностью воды. Под действием силы тяжести они опускались на поверхность, формируя различные структуры. Для создания равномерного распределения жёстких полиамидных комплексов по поверхности и по размерам использовалась интенсивная работа плунжеров, расположенных параллельно смежным стенкам ванны, возбуждающая волны и вихри большой амплитуды. Скорость течения на поверхности превышала 10 см/с. После отключения накачки проводилась серия фотосъёмок поверхности воды с различными интервалами в течение до 120 ч. В первые 1.5 ч снимки делались каждые 5 секунд, далее – каждые 30 секунд. Чтобы устранить влияние краевых эффектов стенок ванны, подсчёт количества поверхностных структур проводился в центральной области размером 50×50 см². Частицы на поверхности подсвечивались светодиодной лентой, установленной по бокам ванны. Площадь каждой структуры определялась по количеству пикселей, приходящихся на неё на изображении.

Таким образом, эксперименты проводились при различных условиях, что приводило к разным значениям средней фоновой скорости течения: при обычной подсветке ($V \sim 0.01$ см/с), при выключенной подсветке ($V \sim 0.005$ см/с), при тепловой изоляции ванны ($V \sim 0.002$ см/с), а также при искусственном возбуждении с помощью плунжеров (V от 0.006 до 0.25 см/с).

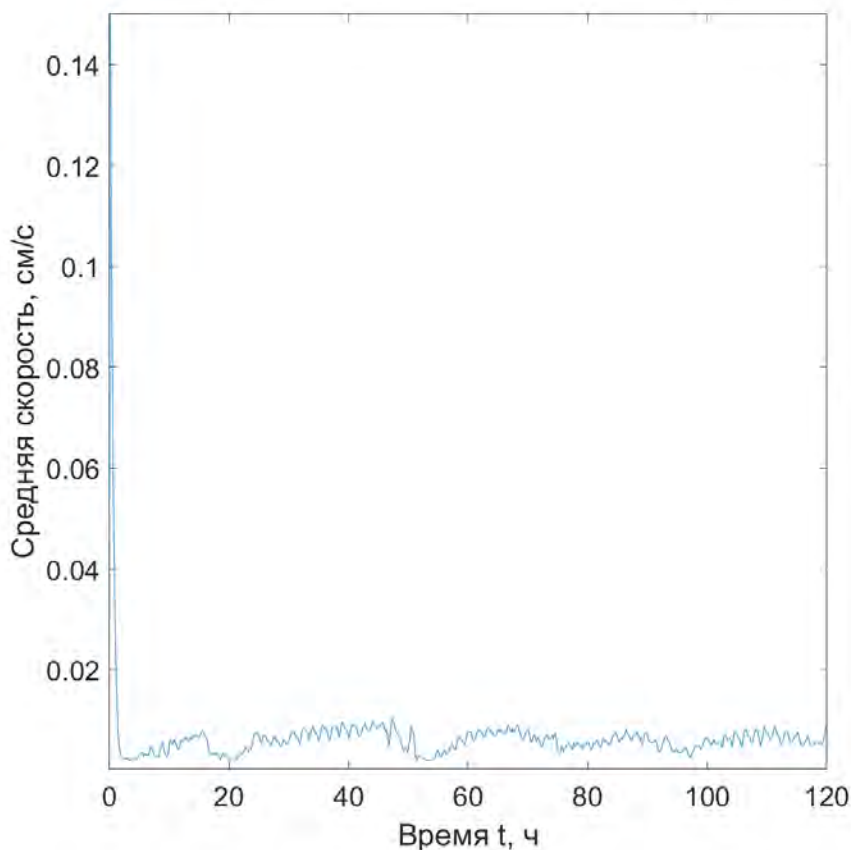


Рис. 33: Зависимость среднего модуля скорости потока на поверхности воды от времени.

4.2 Экспериментальные результаты и обсуждения

4.2.1 Формирование распределения Парето в системах кластеров на поверхности воды

Сразу после отключения накачки скорость течения на поверхности начинает снижаться из-за затухания волн, вызванного вязкими потерями. На рисунке 33 показано, что в течение нескольких часов скорость потока достигает минимального значения. После этого на поверхности сохраняются медленные случайные движения со средней скоростью порядка 0.01 см/с. Такое фоновое движение поддерживается даже при выключенных плунжерах и обусловлено объемной конвекцией, возникающей в результате вертикальных и горизонтальных температурных градиентов. Эти градиенты появляются из-за нагрева стенок ванны светодиодной подсветкой.

На рисунке 34 представлены фотографии фрагментов поверхности воды с полиамидными частицами через 10 минут (а), 22 часа (б) и 60 часов (в) после отключения накачки. В начальный момент на поверхности присутствует около

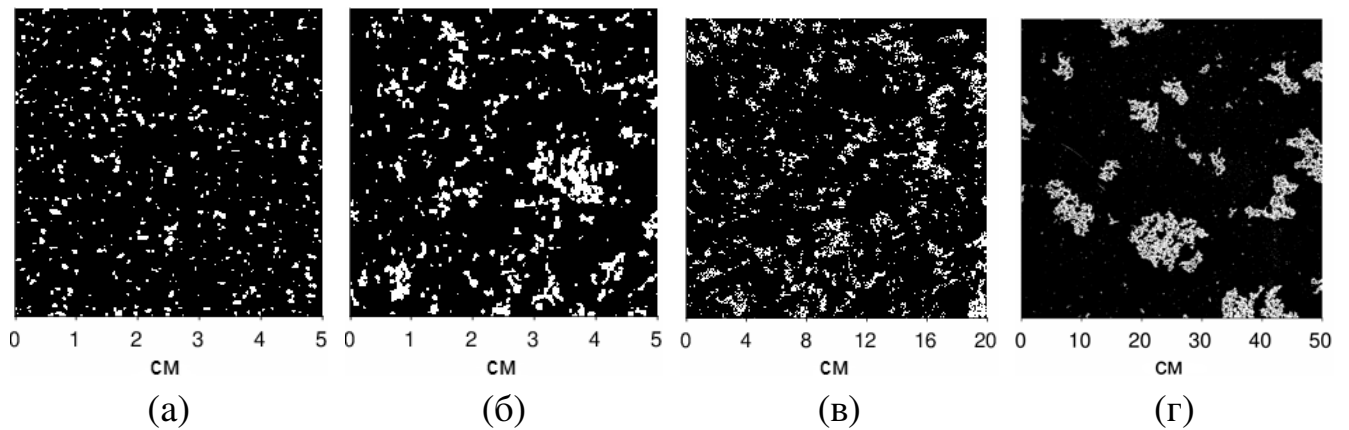


Рис. 34: Фотографии структур на поверхности воды через 10 минут (а), 22 часа (б) и 60 часов (в) после выключения накачки. Изображение (г) – поверхность воды через 20 часов после выключения накачки при отсутствии постоянной подсветки.

10^5 комплексов площадью от 10^{-4} до 10^0 см², сформированных из микрочастиц.

Как видно на рисунке 34а, большинство комплексов имеют дисковидную форму. Также наблюдаются процессы слияния двух дисков в один, или трёх – в линейные структуры формы «I» или «Т». Со временем, на первой стадии, такие комплексы объединяются в более крупные структуры размером до 0.3 см (рисунок 34б). Эти комплексы характеризуются однородностью структуры. Через 60 часов формируются ветвистые кластеры размером в несколько сантиметров (рисунок 34в).

На рисунке 34г показаны кластеры, образованные через 20 часов, но при отключённой подсветке. В этом случае скорость конвекционного течения снижается до 0.005 см/с, и размер кластеров оказывается больше, чем при освещении (рисунок 34в). Это подтверждает, что кластеризация включает две стадии: рост отдельных комплексов до 0.5 см и их объединение в разветвлённые структуры. Интенсивность и масштаб определяются скоростью поверхностного течения.

На рисунке 35 представлены распределения абсолютной скорости и её градиента (сдвига) через 20, 60 и 86 часов после отключения накачки. Видно, что структура потока изменяется со временем. Это связано с тем, что условия нагрева, вызывающие конвекцию, нестационарны и неоднородны. Длины корреляции скоростей заметно превышают размеры кластеров.

На рисунке 36 представлены распределения нормализованного числа структур на поверхности по их площади $N(S)$. Они получены путём деления количества комплексов и кластеров на изображениях, чьи площади попадают в заданный интервал, на число снимков и ширину этого интервала. Шаг по площади увеличи-

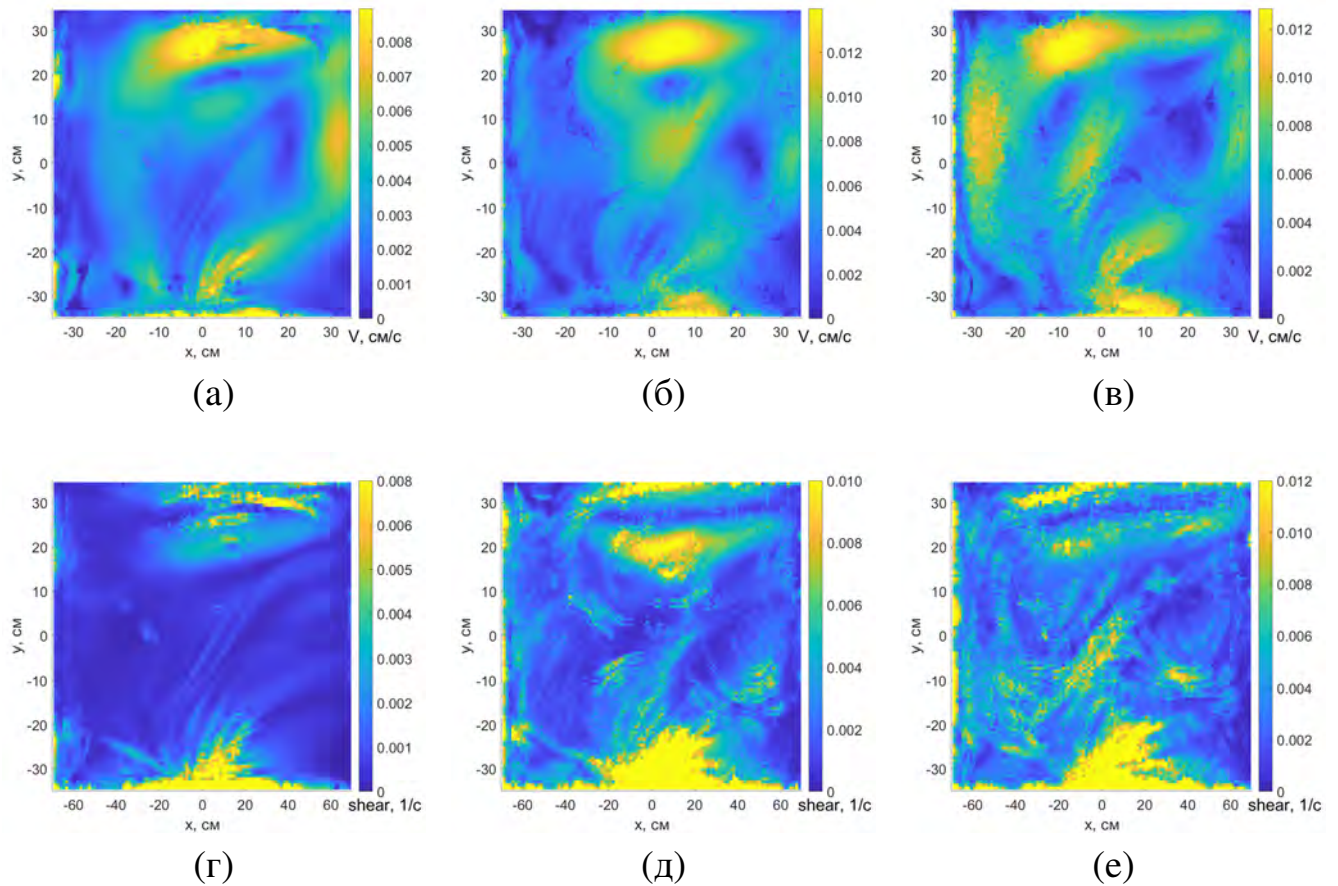


Рис. 35: Распределения модуля скорости на поверхности воды через 20 ч (а), 60 ч (б) и 86 ч (в) после выключения накачки. Распределения частных градиентов скорости (сдвига) $\sqrt{(\partial V_x/\partial y)^2 + (\partial V_y/\partial x)^2}$ на поверхности воды через 20 ч (г), 60 ч (д) и 86 ч (е) после выключения накачки.

вается логарифмически – от 10^{-4} до 50 см^2 . Общее число проанализированных фотографий составляет 1000. Кривая 1 соответствует 12 минутам после выключения накачки, кривая 2 – 16 часам, кривая 3 – 49.3 часа, кривая 4 – 116 часов. Видно, что вероятность обнаружения крупных кластеров на изображениях меньше единицы.

Сразу после отключения накачки (см. кривая 1), когда скорость течения на поверхности остаётся высокой, большинство структур имеют площадь порядка 10^{-2} см^2 или меньше. Лишь немногие из них достигают площади около 1 см^2 . Через 16 часов после отключения (см. кривая 2), когда волновое движение полностью затухает, на изображениях появляется множество структур в широком диапазоне площадей – до 2 см^2 . Тем не менее, распределение, соответствующее кривой 2, ещё не достигло равновесного состояния, и потому не может быть описано универсальной функцией. Через 49.3 часа (см. кривая 3) продолжается рост крупных кластеров за счёт присоединения более мелких комплексов. Появляются класте-

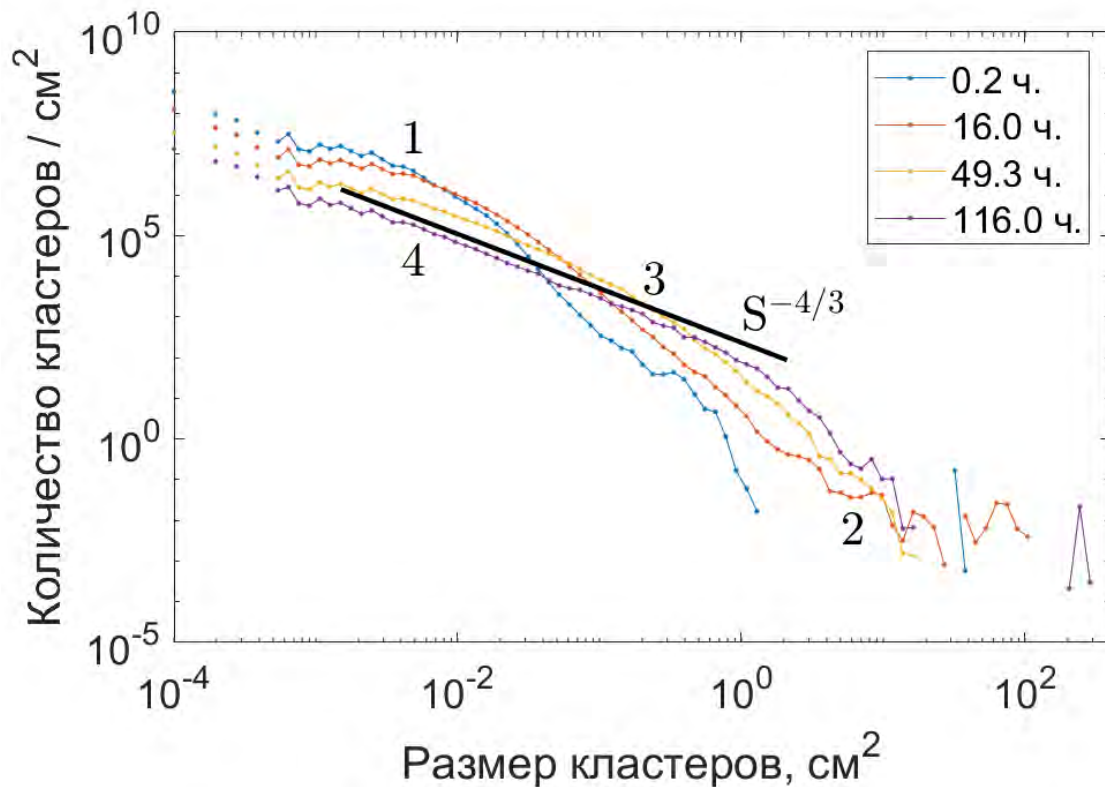


Рис. 36: Распределение нормализованного числа структур на поверхности воды по их площади $N(S)$ через 12 минут (1), 16 часов (2), 49.3 часа (3) и 116 часов (4) после выключения накачки. Средняя скорость поверхностного течения составляет 0.01 см/с.

ры размером около 10 см^2 . На 116 часах после отключения накачки наблюдается, что распределение поверхностных структур в диапазоне площадей от 0.001 до 1 см^2 приближается к степенному виду. Очевидно, что полученное распределение $N(S)$ можно аппроксимировать функцией $N(S) \sim (S/S_0)^{-n}$, где показатель степени $n \approx \frac{4}{3}$. Однако стоит отметить, что при $S > 1 \text{ см}^2$ распределение $N(S)$ заметно отклоняется от степенного закона. Это может быть связано с избыточно высокой скоростью фоновой скорости на поверхности воды либо с недостаточной длительностью наблюдения.

Таким образом, при длительном времени наблюдения распределение нормализованного числа поверхностных структур по площади $N(S)$ приобретает степенной характер с характерным масштабом $S_0 \approx 2 \cdot 10^{-2} \text{ см}^2$.

Как упоминалось выше, среднее значение V случайной фоновой скорости потока на поверхности может определять как характерное время достижения функцией $N(S)$ равновесного состояния, так и максимальный размер кластеров. Для проверки этого предположения среднюю скорость V уменьшили до 0.002 см/с, установив дополнительную теплоизоляцию из пенополистирола толщиной 5 см по

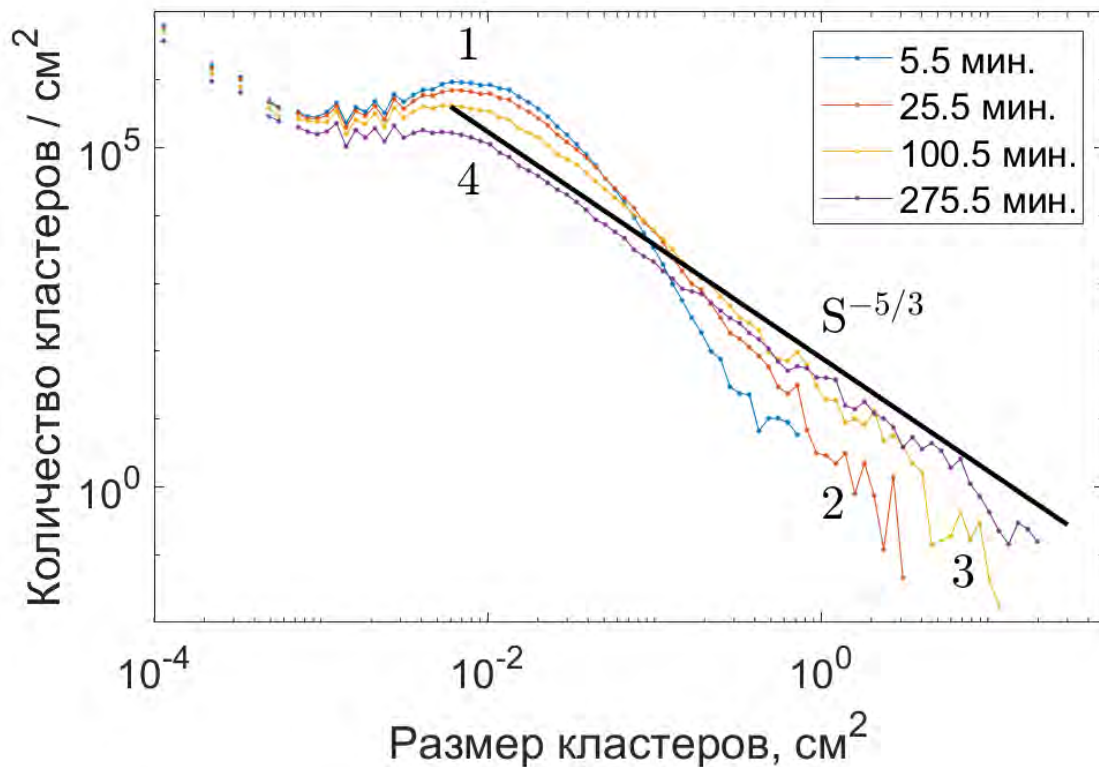


Рис. 37: Распределение нормализованного числа кластеров частиц по их размеру $N(S)$ через 5.5 минуты (1), 25 минут (2), 100.5 минуты (3) и 275.5 минуты (4) после выключения накачки. Средняя скорость поверхностного течения составляет 0.002 см/с.

боковым стенкам ванны и изменив режим освещения. На рисунке 37 представлены распределения $N(S)$, полученные через 5.5, 25, 100.5 и 275.5 минут после выключения накачки при частоте 3 Гц. Средняя скорость течения на поверхности сразу после отключения плунжеров при этой частоте составляла порядка 10 см/с.

Хорошо видно, что установление степенного распределения происходит значительно быстрее, чем в случае высокой скорости фонового течения. Уже примерно через 1.5 часа (см. кривую 3) наблюдается формирование степенного распределения.

В диапазоне площадей от 10^{-1} до 10^1 см² наблюдаемая зависимость $N(S)$ описывается степенной функцией с показателем $n \approx 9/4$. Видно, что увеличение числа крупных кластеров сопровождается уменьшением количества более мелких. Кривая 4, полученная через 4.6 часа, в диапазоне площадей от 10^{-2} до 10^1 см² хорошо аппроксимируется функцией $N(S) \sim (S/S_0)^{-n}$ с показателем $n \approx 5/3$ и характерной площадью $S_0 = 1.0 \cdot 10^{-1}$ см². Процесс перераспределения площадей между малыми и крупными структурами приводит к уменьшению абсолютного значения показателя степени, описывающего экспериментальные зависимости

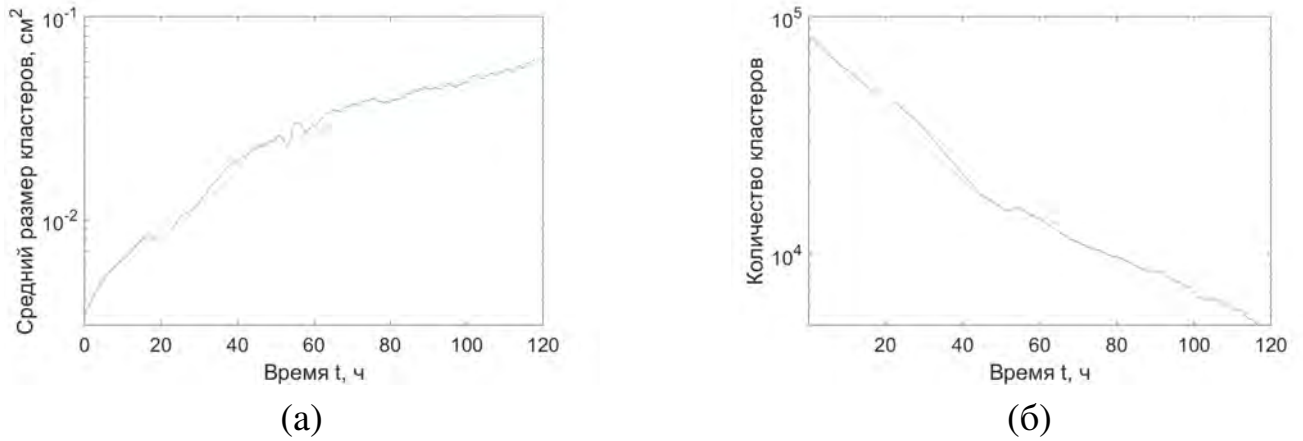


Рис. 38: Зависимости среднего размера кластеров (а) и числа кластеров (б) на поверхности воды размером $50 \times 50 \text{ cm}^2$ от времени после выключения накачки. Скорость фонового течения составляет 0.01 cm/s .

$N(S)$. Вероятность появления крупного кластера на поверхности воды увеличивается со временем.

На распределениях $N(S)$ отчётливо видны максимумы (см. кривые 1, 2 и 3). Можно предположить, что концентрация комплексов вблизи $S \approx 10^{-2} \text{ cm}^2$ в первые минуты наблюдения обусловлена интенсивной работой плунжеров, в результате которой крупные кластеры разрушаются на более мелкие под действием мощных потоков жидкости. На рисунке 38а представлена зависимость средней площади структур от времени в полулогарифмических координатах после выключения возбуждения при скорости фонового потока 0.01 cm/s . Средний размер структур, определяемый как сумма площадей всех комплексов и кластеров S , делённая на их число N (т.е. $S_{\text{ср}} = S/N$), возрастает с течением времени. Видно, что даже спустя 116 часов после отключения возбуждения процесс кластеризации не завершён. Предполагается, что в течение первых 40 часов средняя площадь $S_{\text{ср}}$ растёт экспоненциально с характерным временем $\tau_0 \sim 15$ часов. Начиная с 45-го часа, средний размер кластера продолжает расти экспоненциально, но уже с характерным временем $\tau_0 \sim 40$ часов, что связано с объединением линейных структур.

На рисунке 38б показана зависимость числа кластеров от времени в полулогарифмических координатах после отключения накачки. Очевидно, что число кластеров $N(t)$ со временем уменьшается с $8 \cdot 10^4$ до $5 \cdot 10^3$. При времени менее 45 часов процесс убывания можно аппроксимировать экспоненциальной функцией с характерным временем $\tau_0 \approx 15$ часов. При времени более 45 часов уменьшение числа кластеров также происходит по экспоненте: $N(t) \sim \exp(-t/\tau_0)$, где

$\tau_0 \approx 40$ часов. Различие характерных времён связано с качественным изменением структур, формирующих комплексы и кластеры. На начальной стадии основным процессом, по-видимому, является формирование линейных структур-комплексов большого размера на основе дисковых комплексов. Однако на более поздних стадиях рост кластеров преимущественно происходит за счёт слияния линейных поверхностных структур.

Сравнение рисунков 38а и 38б ясно показывает, что средний размер кластеров увеличивается за счёт уменьшения общего числа структур при сохранении их суммарной площади S .

Степенное распределение вероятности событий типа C/x^n , известное как распределение Парето [79], наблюдается в экономике [80], геофизике [81], астрофизике [82] и физике конденсированного состояния [79, 83]. Следует отметить, что распределение Парето часто возникает в результате случайных взаимодействий в системах с ограниченными ресурсами – например, при распределении доходов среди населения или распределении городов по численности населения [84, 85]. В экспериментах суммарная площадь поверхностных структур ограничена общим числом частиц полиамида РА-12, распылённых на поверхность воды, и не может превышать площадь экспериментальной ванны. Случайность взаимодействий определяется фоновым течением на поверхности воды.

В экспериментах частицы полиамида РА-12 уже были объединены в комплексы за счёт действия ван-дер-ваальсовых сил. Предполагается, что средняя плотность этих комплексов оказалась ниже плотности воды из-за наличия пустот в их объёме. Поэтому после перемешивания интенсивной накачкой они погружаются в воду, и часть их массы с высотой h , полностью смачиваемая жидкостью, выступает над поверхностью. Взаимодействуя друг с другом под поверхностью воды посредством ван-дер-ваальсовых сил [69], комплексы собираются в плоские диски характерного размера около 0.2–0.3 см и толщиной около 0.01 см. Такие комплексы могут содержать до 10^6 частиц полиамида РА-12. Об этом свидетельствует преобладающее количество комплексов с площадью менее 10^{-2} см² на рисунках 36 и 37.

Дисковые комплексы с непрерывной поверхностной структурой не могут достигать больших размеров из-за жёсткости структуры, направленного действия ван-дер-ваальсовых сил и разрушительного воздействия поверхностных течений. Общее количество мелких комплексов значительно превышает число крупных,

поэтому рост средней площади поверхностных структур в основном связан со слиянием мелких комплексов – это первая стадия. Можно предположить, что процесс слияния структур носит случайный характер, и скорость изменения числа кластеров пропорциональна их количеству N :

$$dN(t)/dt = 1/\tau_0 \cdot N$$

На второй стадии уменьшение числа кластеров происходит в основном за счёт присоединения мелких линейных комплексов к более крупным кластерам. При очень больших временах консолидации, когда число кластеров становится весьма малым, экспоненциальная зависимость теряет физический смысл.

Рассмотрим качественно процесс слияния двух дисковых комплексов, удерживаемых ван-дер-ваальсовыми силами, в один – то есть в линейную структуру на первой стадии кластеризации. Сближение двух дисков на расстояние порядка их радиуса происходит под действием фонового течения жидкости на поверхности. Размеры диаметров дисков близки к капиллярной длине $\sqrt{2\sigma/(\rho g)}$, которая для воды составляет 3.9 мм [13]. Здесь σ – коэффициент поверхностного натяжения, g – ускорение свободного падения, а ρ – плотность воды. Следовательно, можно полагать, что на данной стадии процесс слияния комплексов определяется действием сил поверхностного натяжения.

Предположим, что в сформированном комплексе расстояние между центрами дисков равно сумме их радиусов: $R_1 + R_2$. Также будем считать, что при слиянии толщина и суммарная площадь комплексов остаются неизменными. Таким образом, в энергетическом балансе следует учитывать только изменение энергии боковой поверхности комплексов и высоту h . Суммарная энергия боковых поверхностей двух отдельных дисков может быть записана в виде:

$$E_s = 2\pi h\sigma(R_1 + R_2)$$

После слияния в форму "гантели" энергия боковой поверхности может быть записана как:

$$E_L = h\sigma(\pi + 2)(R_1 + R_2)$$

Видно, что отношение энергий $E_s/E_L \approx \frac{2\pi}{\pi + 2}$ всегда превышает единицу.

Для подтверждения этого предположения обратимся к рисунку 34б, на котором показано большое количество линейных комплексов, что свидетельствует о преобладании на начальной стадии дисковых комплексов, форма которых не изменяется после слияния. Формирование крупных дискообразных комплексов на этом этапе наблюдается редко.

На следующей стадии формируются крупные кластеры со сложной структурой. Их «строительным материалом» служат комплексы различной формы: диски, гантели, структуры типа «I» и «T». В результате слияния возникают сложные структуры, не обладающие симметрией, с нарушенными границами и отверстиями на поверхности (см. рисунки 34в и 34г). Такие кластеры дрейфуют по поверхности воды и долго сохраняют свою форму. Изменения происходят, когда к ним присоединяется меньший комплекс или происходит слияние двух крупных кластеров.

Следует отметить, что как присоединение отдельных комплексов, так и объединение кластеров возможно только при наличии хаотичного потока жидкости со средней скоростью V . Однако при слишком высоких скоростях фонового течения рост кластеров становится невозможным.

Из простых энергетических соображений следует, что присоединение малого комплекса радиуса R_S к крупному кластеру размером R_B возможно, если уменьшение полной энергии системы (малый плюс большой кластер) превышает кинетическую энергию малого комплекса.

Изменение энергии объединённого кластера приблизительно равно:

$$\delta E \approx (\pi - 2)h\sigma R_S$$

Кинетическая энергия кластера равна $M_S V^2/2$. Масса кластера определяется как $M_S = \pi R_S^2 h \rho_c$, где ρ_c – плотность кластера.

Таким образом, условие присоединения меньшего кластера к большему может быть выражено в виде неравенства:

$$(\pi - 2)h\sigma R_S > \pi R_S^2 h \rho V^2,$$

Из этого неравенства получаем качественное ограничение на размер меньшего комплекса, который может присоединиться к более крупному кластеру при заданной скорости потока жидкости V .

$$R_s < (\pi - 2)/\pi\sigma/\rho V^2$$

Таким образом, рост крупных кластеров происходит преимущественно за счёт присоединения к ним более мелких комплексов. Исчезновение меньших комплексов размером менее 0.3 см происходит в основном на поверхности (см. рисунки 36 и 37).

Однако размер R_B крупного кластера также ограничен действием сил, возникающих из-за сдвиговых течений жидкости, которые разрушают связи, удерживающие комплексы вместе. Предположим, что градиент скорости ΔV по порядку величины составляет V/R_B , а площадь кластера оценивается как $\sim R_B^2$. Тогда для оценки можно записать:

$$V/R_b \cdot R_B^2 \eta \sim \sigma R_s$$

Из выражения (2) следует, что при увеличении скорости фонового сдвигового течения максимальная площадь кластера должна уменьшаться согласно закону:

$$R_B^2 \sim (\sigma R_s / V / \eta)^2 \quad (16)$$

где η – коэффициент динамической вязкости.

Для подтверждения этой зависимости был исследован процесс консолидации при различных режимах работы плунжеров. Средняя скорость фонового течения жидкости V изменялась почти на два порядка – от 0.006 до 0.25 см/с. На рисунке 38 представлены зависимости средней площади структур при разных скоростях фонового течения. Видно, что при скоростях 0.01 и 0.006 см/с средний размер кластеров экспоненциально увеличивается на протяжении всех 25 часов наблюдения. При скорости 0.04 см/с и выше значение $S_{\text{ср}}$ достигает максимума, причём чем выше скорость V , тем меньше это максимальное значение $S_{\text{ср}}$. Удивительно, что экспериментально измеренный средний размер кластера уменьшается обратно пропорционально квадрату скорости фонового течения в соответствии с формулой (16) (см. вставку на рисунке 39).

Следует отметить, что ранее в работе [12] было показано: для кластеров с фрактальной структурой средний размер устойчивого агрегата уменьшается с увеличением скорости сдвигового течения по степенному закону с показателем

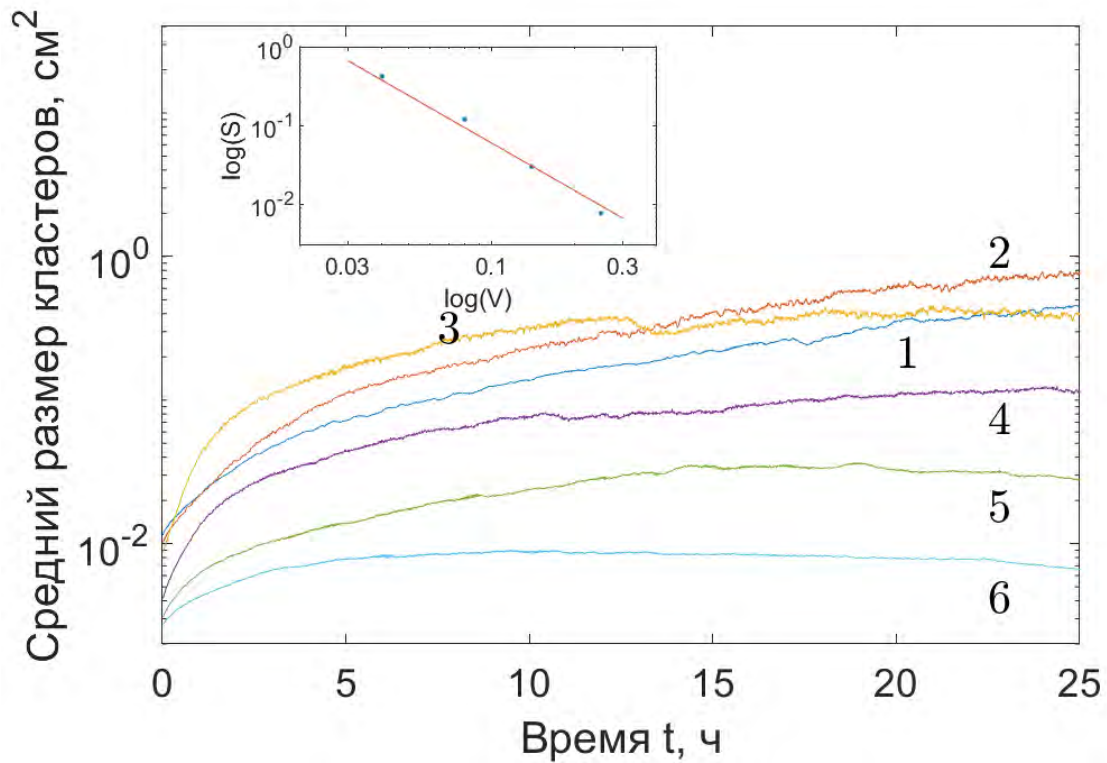


Рис. 39: Зависимость средней площади кластеров S_{cp} на поверхности воды от времени при различных значениях скорости фонового течения в полулогарифмических координатах. На вставке показана зависимость максимальной средней площади кластеров от скорости течения на поверхности в логарифмических координатах (лог–лог масштаб). 1 – 0.006 см/с, 2 – 0.01 см/с, 3 – 0.04 см/с, 4 – 0.08 см/с, 5 – 0.14 см/с, 6 – 0.25 см/с.

степени, модуль которого меньше единицы. Однако для кластеров с более плотной упаковкой [11] средний размер агрегата лишь слабо зависит от скорости сдвига. Долговременная динамика разрушения отдельных коллоидных кластеров под действием сдвиговых течений при различных фрактальных размерностях подробно исследована в работе [10].

На рисунке 38 показано, что течение жидкости со скоростью 0.04 см/с и выше существенно ограничивает рост кластеров. Отметим, что при всех значениях скорости фонового течения наблюдается степенное распределение нормализованного числа кластеров по площади поверхности. В качестве примера на рисунке 40 представлены результаты, полученные при скорости течения 0.08 см/с.

Через 25 минут после отключения накачки распределение $N(S)$ ещё далеко от степенного характера. Однако, начиная примерно с 150-й минуты, на распределениях $N(S)$ чётко выделяются две области, описываемые степенными функциями вида $\sim S^{-n}$ с показателями степени $n \approx 7/10$ и $n \approx 5/2$. Наличие двух степенных участков указывает на различные условия формирования поверхностных струк-

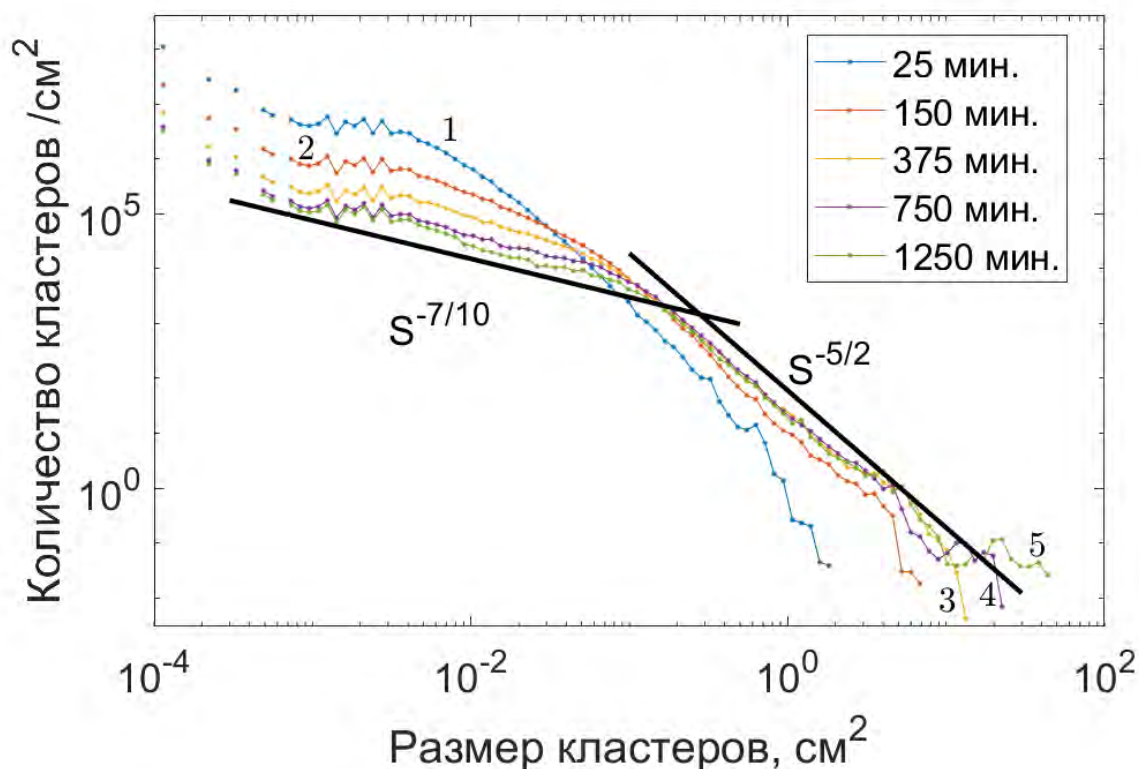


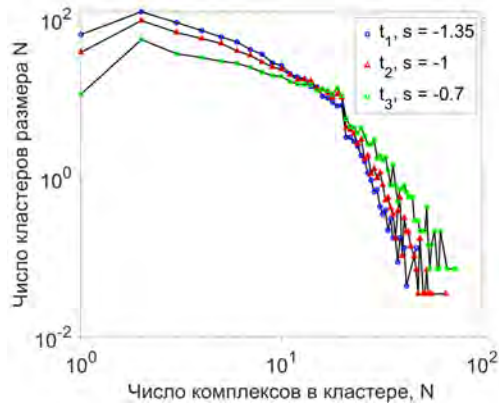
Рис. 40: Распределение нормализованного числа кластеров по площади поверхности $N(S)$ через 25.2 минуты (1), 150 минут (2), 375 минут (3), 750 минут (4) и 1250 минут (5) после выключения возбуждения.

тур и подтверждает предположение о существовании двух стадий консолидации: образования крупных комплексов и последующего формирования из них разветвлённых кластеров.

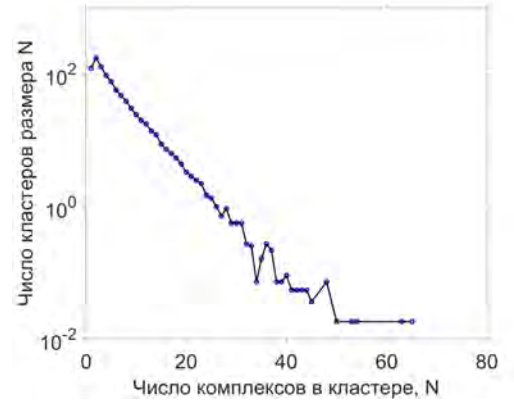
4.2.2 Распределение Парето в системе кластеров полиамидных частиц на поверхности воды

При выводе распределения Парето для кластеров гидродинамические характеристики системы практически не учитывались. В связи с этим возникает вопрос: возможно ли получить такое распределение с помощью численного моделирования, задав простейшие законы движения структур по поверхности жидкости, а также агрегации и распада частиц, сформулированные в работе?

Моделирование проводилось следующим образом. Предполагалось, что комплексы имеют форму плоских дисков. В момент времени $t = 0$ все диски имели одинаковый радиус r_0 , а координаты 4900 комплексов ν были заданы на узлах квадратной решётки с небольшим случайным смещением. Начальные скорости комплексов выбирались случайным образом как по направлению, так и по модулю



(а)



(б)

Рис. 41: (а) Модельный расчёт распределения числа кластеров по количеству составляющих их комплексов (по площади) с учётом разделения, если кластер содержит более 20 комплексов. Время отсчитывается от начала процесса кластеризации, $t_1 < t_2 < t_3$. (б) Модельный расчёт распределения числа кластеров по количеству составляющих их комплексов (по площади) при запрете на разделение кластеров большой площади.

в диапазоне $v = \langle v \rangle \pm 0.1 \langle v \rangle$. Между столкновениями друг с другом и со стенками двумерного квадратного «сосуда» комплексы двигались равномерно и прямолинейно. Отражение от стенок ванны считалось абсолютно упругим. Первоначально при столкновении два комплекса радиусами r_1 и r_2 сливались в единый диск (новый комплекс), который продолжал движение со скоростью

$$v = (v_1 + v_2)/2 \quad (17)$$

а его радиус вычислялся по формуле $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$. Закон преобразования скорости (17) в простейшей форме учитывает, что частицы движутся вместе с жидкой средой. Если столкнувшиеся кластеры в сумме содержат более 20 элементарных комплексов, то с вероятностью $1/2$ происходит разделение: два комплекса изменяют свои скорости на противоположные.

На рисунке 41а приведены результаты расчётов для различных моментов времени $t_1 < t_2 < t_3$, усреднённые по 30 запускам программы с разными начальными условиями. Дробные значения по оси ординат y для крупных кластеров являются следствием этого усреднения. Во всех графиках в диапазоне 5–20 комплексов отчётливо выделяются линейные участки с показателями степени $s = -1.35$, $s = -1$ и $s = -0.7$, в которых формируется распределение Парето.

Для сравнения была проведена аналогичная симуляция распределения кластеров по площади при условии запрета на разделение крупных кластеров. Вы-

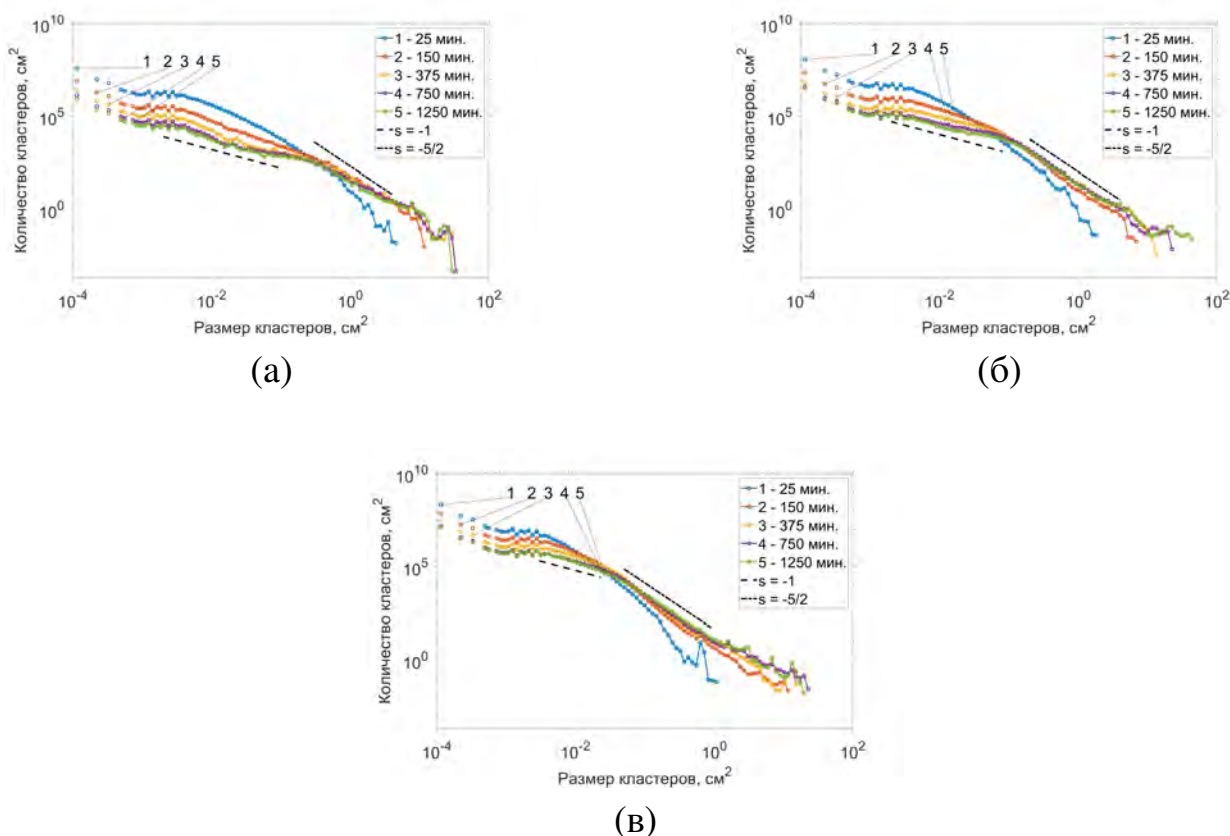


Рис. 42: Распределения нормализованного числа кластеров по площади поверхности $N(S)$ через 25.2 минуты (1), 150 минут (2), 375.2 минуты (3), 750.2 минуты (4) и 1250 минут (5) после отключения возбуждения. Средняя скорость потока на поверхности составляет: (а) – 0.04 см/с, (б) – 0.08 см/с, (в) – 0.14 см/с.

яснилось, что при длительном времени на поверхности воды формируется один крупный кластер, в который сливаются все изначально случайно распределённые комплексы. На промежуточных стадиях кластеризации, когда на поверхности всё ещё существует множество независимых кластеров разного размера, распределение числа кластеров по количеству составляющих их комплексов (по площади) приближается к нормальному (гауссовскому) вплоть до примерно 45 комплексов в кластере (рисунок 42б). Таким образом, отмена условия разделения крупных кластеров приводит к радикальному изменению распределения кластеров по площади.

На рисунке 42 представлены распределения плотности кластеров по площади в различные моменты времени, полученные экспериментах при различных средних скоростях сдвигового потока на поверхности воды.

Кривые 1–5 на рисунке 42а–в иллюстрируют распределения, соответствующие различным моментам времени после отключения интенсивной накачки, когда система находилась в квазистационарном состоянии. Средняя скорость потоков на

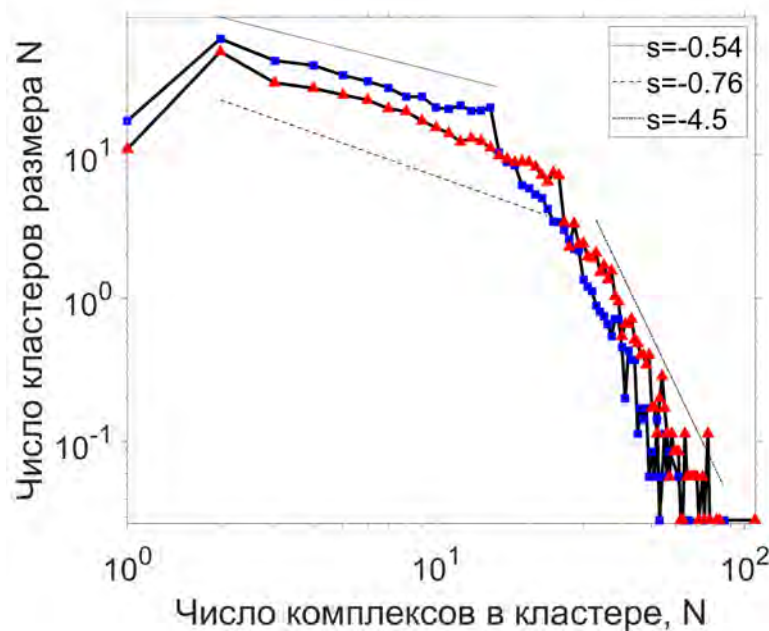


Рис. 43: Результаты численного моделирования процессов агрегации и фрагментации в системе кластеров на поверхности воды при условии, что разрушение становится возможным, когда число комплексов в кластере достигает 15 (синие кривые) и 25 (красные кривые) или более.

поверхности задавалась колебаниями плунжеров, на которые подавались электрические сигналы в виде белого шума с различной амплитудой. Кривая 1, полученная через 25 минут после отключения накачки, близка к экспоненциальному закону. Через 150 минут в распределениях 2–4 можно выделить два интервала, в которых экспериментальные зависимости хорошо описываются степенными функциями. Переход от первой к второй такой функции происходит при характерном размере кластера P_0 . При этом отчётливо видно, что значения показателя степени с течением времени уменьшаются по модулю незначительно. Во всех распределениях на рисунке 42, полученных через 1250 минут после отключения накачки, абсолютные значения показателя степени близки к 1 в области малых площадей и к 2.5 – в области больших. Отметим, что переход от степенного распределения при малых площадях кластеров к более крутому закону наблюдается при различных значениях площади P_0 .

При увеличении средней скорости сдвигового потока от 0.04 до 0.14 см/с величина P_0 уменьшается в 10 раз – от 0.4 см² до 0.04 см². Эти значения P_0 оказываются близки к среднему размеру кластеров, приведённому на рисунке 43. Следует отметить, что уменьшение среднего размера кластеров при увеличении скорости сдвигового потока связано с процессами распада крупных кластеров на два меньших. Этот экспериментальный результат качественно согласуется с зависимостью

[Н5, уравнение 16] и расчётными кривыми, приведёнными на рисунке 41а.

На рисунке 43 представлены дополнительные результаты численного моделирования процессов консолидации и распада в системе кластеров. Синие точки описывают распределение кластеров по площади в случае, когда разрешено разрушение кластеров, содержащих более 15 комплексов. Красные символы соответствуют сценарию, при котором разрушение допускается для кластеров с числом комплексов 25 и более. Показатель степени s рассчитывался для тех участков кривых, где размер кластеров превышает 2, но остаётся меньше критического значения. Следует отметить качественное согласие между экспериментальными и расчётными кривыми, представленными на рисунках 42 и 43.

На кривых наблюдается характерный излом при определённом характерном значении площади кластера P_0 . Это значение на экспериментальных кривых увеличивается с уменьшением скорости сдвигового течения, а в расчётных кривых оно было явно задано в условиях моделирования. Участки кривых выше и ниже критического значения P_0 могут быть аппроксимированы степенными функциями с различными показателями степени s .

4.3 Выводы

Экспериментально установлено, что в системе структур, формируемых на поверхности воды полиамидными частицами, распределение Парето устанавливается в широком диапазоне площадей. В ходе эксперимента суммарная площадь кластеров трассера на поверхности воды оставалась постоянной. При длительном наблюдении установлено, что распределение нормализованной плотности квазидвумерных кластеров полиамида описывается степенной функцией: $N(S/S_0) \sim C(S/S_0)^{-n}$, что соответствует распределению Парето, где S – площадь поверхности отдельного кластера, S_0 – характерная площадь.

Показано, что формирование двумерных структур на поверхности воды в ванне в значительной степени определяется действием сил поверхностного натяжения. При этом количество поверхностных структур со временем убывает экспоненциально в двух временных интервалах, в то время как их суммарная площадь остаётся постоянной. Также экспериментально установлено, что ключевую роль в процессе кластеризации играет фоновое течение жидкости на поверхности.

Численное моделирование с учётом распада крупных кластеров показало, что распределение кластеров по площади как в области малых, так и в области

больших значений может быть описано степенными функциями с различными показателями степени. Эти показатели уменьшаются по модулю по мере развития процесса кластеризации. Результаты численного моделирования подтверждены экспериментальными измерениями.

Заключение

В ходе работы были проведены экспериментальные исследования и теоретический анализ, позволившие установить ключевые закономерности генерации и эволюции вихревых течений, формируемых нелинейными волнами на поверхности воды, а также процессов самоорганизации кластерных структур из нейтральных частиц на этой поверхности.

Показано, что волны, распространяющиеся под углом на поверхности жидкости, приводят к формированию полосообразных вихревых течений с характерной шириной, определяемой волновыми параметрами. Вклад в вертикальную завихренность потока складывается из быстро устанавливающегося вклада Стокса и медленно накапливающегося Эйлера вклада. Существенное увеличение последнего во времени связано с диффузионным характером формирования крупномасштабного течения и определяется условиями на границе, в частности наличием загрязнения поверхности.

Установлено, что глубина воды оказывает определяющее влияние на характер вихревых структур. На мелкой воде преобладает один крупный вихрь, тогда как в глубокой формируются два вихря противоположного направления. Энергетические характеристики вихревого движения и энстрофии после прекращения накачки также зависят от глубины: в мелкой воде наблюдается гладкое экспоненциальное затухание, а в глубокой воде – немонотонные колебания, вызванные взаимодействием с объёмными течениями. Кроме того изучены статистические свойства поверхностных вихрей. Функции плотности вероятности (PDF) завихренности от квадрата завихренности при разных глубинах жидкости подчиняется распределению Гаусса. PDF вихревой энергии от квадрата вихревой энергии подчиняется распределению Гаусса при малых амплитудах накачки. Нарушение симметрии распределения происходит за счёт наличия крупномасштабного вихревого течения на поверхности жидкости.

Также в работе подробно изучены процессы самоорганизации полиамидных частиц на поверхности воды. Установлено, что в течение длительного времени в

системе формируется устойчивая кластерная структура, подчиняющаяся распределению Парето. Суммарная площадь кластеров остаётся постоянной, а их число убывает экспоненциально, что указывает на направленность процессов агрегации. Выявлена ключевая роль фонового течения в формировании распределений кластеров, что подтверждено результатами численного моделирования и хорошо согласуется с экспериментом.

Список литературы

1. Double Cascade Turbulence and Richardson Dispersion in a Horizontal Fluid Flow Induced by Faraday Waves / A. von Kameke, F. Huhn, G. Fernandez-Garcia [et al.] // *Physical Review Letters*. — 2011. — Vol. 107. — P. 074502.
2. Inverse Energy Cascade and Emergence of Large Coherent Vortices in Turbulence Driven by Faraday Waves / N. Francois, H. Xia, H. Punzmann, M. Shats // *Physical Review Letters*. — 2013. — Vol. 110, № 19. — P. 194501.
3. Mesquita, O.N. Transport by capillary waves / O.N. Mesquita, S. Kane, J.P. Gollub // *Phys. Rev. A*. — 1992. — Vol. 45, № 6. — P. 3700–3704.
4. Nonlinear Generation of Vorticity by Surface Waves / S.V. Filatov, V.M. Parfenyev, S.S. Vergeles [et al.] // *Physical Review Letters*. — 2016. — Vol. 116, № 5. — P. 054501.
5. Generation of vortices by gravity waves on a water surface / S.V. Filatov, S.A. Aliev, A.A. Levchenko, D.A. Khramov // *JETP Letters*. — 2016. — Vol. 104, № 10. — P. 702–708.
6. Lucassen-Reynders, E.H. Properties of capillary waves / E.H. Lucassen-Reynders, J. Lucassen // *Advances in Colloid and Interface Science*. — 1970. — Vol. 2, № 4. — P. 347–395.
7. Формирование и затухание вихревого движения на поверхности жидкости / С.В. Филатов, Д.А. Храмов, А.М. Лихтер, А.А. Левченко // *Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования*. — 2017. — № 12. — P. 103–108.
8. Formation and decay of vortex motion on a liquid surface excited by a wave cascade / V.M. Parfenyev, S.V. Filatov, M.Y. Brazhnikov [et al.] // *JETP Letters*. — 2020. — Vol. 111, № 10. — P. 549–561.

9. Francois, N. Two-dimensional turbulence in three-dimensional flows / N. Francois, H. Xia // *Physics of Fluids*. — 2017. — Vol. 29. — P. 111107.
10. Harshe, Y.M. Universal breakup of colloidal clusters in simple shear flow / Y.M. Harshe, M. Lattuada // *Journal of Physical Chemistry B*. — 2016. — Vol. 120, № 29. — P. 7244–7252.
11. Restructuring and break-up of two-dimensional aggregates in shear flow / N.D. Vassileva, D. van den Ende, F. Mugele, J. Mellema // *Langmuir*. — 2006. — Vol. 22, № 11. — P. 4959–4967.
12. Higashitani, K. Two-dimensional simulation of the breakup process of aggregates in shear and elongational flows / K. Higashitani, K. Iimura // *Journal of Colloid and Interface Science*. — 1998. — Vol. 204, № 2. — P. 320–327.
13. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. — 2-е англ. изд. — М. : Pergamon; Физматлит, 2003.
14. Lighthill J. *Waves in Fluids*. — Cambridge : Cambridge University Press, 1978.
15. Lamb H. *Hydrodynamics*. — 6th ed. — Cambridge : Cambridge University Press, 1932. — Гл. IX: Oscillations of Liquids in Vessels.
16. Falkovich G. E. *Fluid Mechanics: A Short Course for Physicists*. — 1-е изд. — Cambridge : Cambridge University Press, 2011. — Translated and extended version.
17. Experimental Simulation of the Generation of a Vortex Flow on a Water Surface by a Wave Cascade / S.V. Filatov, A.V. Orlov, M.Y. Brazhnikov, A.A. Levchenko // *JETP Letters*. — 2018. — Vol. 108, № 8. — P. 519–526.
18. Parfenyev, V.M. Large-scale vertical vorticity generated by two crossing surface waves / V.M. Parfenyev, S.S. Vergeles // *Physical Review Fluids*. — 2020. — Vol. 5. — P. 094702.
19. Three-Dimensional Fluid Motion in Faraday Waves: Creation of Vorticity and Generation of Two-Dimensional Turbulence / N. Francois, H. Xia, H. Punzmann [et al.] // *Physical Review X*. — 2014. — Vol. 4. — P. 021021.

20. Colombi, R. Three-dimensional flows beneath a thin layer of 2D turbulence induced by Faraday waves / R. Colombi, M. Schlüter, A. von Kameke // *Experiments in Fluids*. — 2021. — Vol. 62, № 1. — P. 1.
21. Coexistence of Inverse and Direct Energy Cascades in Faraday Waves / R. Colombi, N. Rohde, M. Schlüter, A. von Kameke // *Fluids*. — 2022. — Vol. 7. — P. 148.
22. Boffetta, G. Two-Dimensional Turbulence / G. Boffetta, R.E. Ecke // *Annual Review of Fluid Mechanics*. — 2012. — Vol. 44. — P. 427–451.
23. McWilliams, J.C. Anisotropy and Coherent Vortex Structures in Planetary Turbulence / J.C. McWilliams, J.B. Weiss, I. Yavneh // *Science*. — 1994. — Vol. 264, № 5157. — P. 410–413.
24. Bouchet, F. Statistical Mechanics of Two-Dimensional and Geophysical Flows / F. Bouchet, A. Venaille // *Physics Reports*. — 2012. — Vol. 515, № 5. — P. 227–295.
25. Etling, D. Roll Vortices in the Planetary Boundary Layer: A Review / D. Etling, R.A. Brown // *Boundary-Layer Meteorology*. — 1993. — Vol. 65, № 3. — P. 215–248.
26. Yadav, R.K. Deep Convection–Driven Vortex Formation on Jupiter and Saturn / R.K. Yadav, M. Heimpel, J. Bloxham // *Science Advances*. — 2020. — Vol. 6, № 46. — P. eabb9298.
27. Zakharov V. E. Kolmogorov Spectra of Turbulence. Vol. 1: Wave Turbulence / V. E. Zakharov, V. S. Lvov, G. E. Falkovich. — Berlin : Springer-Verlag, 1992. — 264 p.
28. Wave turbulence on the surface of liquid hydrogen in restricted geometry / M.Y. Brazhnikov, G.V. Kolmakov, A.A. Levchenko, L.P. Mezhov-Deglin // *Low Temperature Physics*. — 2015. — Vol. 41, № 6. — P. 484–488.
29. Observation of wave energy accumulation in the turbulent spectrum of capillary waves on the He-II surface under harmonic pumping / L.V. Abdurakhimov, M.Y. Brazhnikov, I.A. Remizov, A.A. Levchenko // *JETP Letters*. — 2010. — Vol. 91, № 5. — P. 271–276.
30. Experimental study of three-wave interactions among capillary-gravity surface waves / F. Haudin, A. Cazaubiel, L. Deike [et al.] // *Physical Review E*. — 2016. — Vol. 93, № 4. — P. 043110.

31. Shukla, P.K. Nonlinear aspects of quantum plasma physics / P.K. Shukla, B. Eliasson // *Physics-Uspekhi*. — 2010. — Vol. 53, № 1. — P. 51–76.
32. Barenghi, C.F. Introduction to quantum turbulence / C.F. Barenghi, L. Skrbek, K.R. Sreenivasan // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. — 2014. — Vol. 111, № Suppl 1. — P. 4647–4652.
33. Kraichnan, R.H. Inertial Ranges in Two-Dimensional Turbulence / R.H. Kraichnan // *Physics of Fluids*. — 1967. — Vol. 10, № 7. — P. 1417–1423.
34. Paret, J. Experimental Observation of the Two-Dimensional Inverse Energy Cascade / J. Paret, P. Tabeling // *Physical Review Letters*. — 1997. — Vol. 79, № 21. — P. 4162–4165.
35. Sommeria, J. Experimental study of the two-dimensional inverse energy cascade in a square box / J. Sommeria // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1986. — Vol. 170. — P. 139–168.
36. Direct and inverse energy cascades in a forced rotating turbulence experiment / A. Campagne, B. Gallet, F. Moisy, P. Cortet // *Physics of Fluids*. — 2014. — Vol. 26, № 12. — P. 125112.
37. Baggaley, A.W. Spectrum of turbulent Kelvin-waves cascade in superfluid helium / A.W. Baggaley, C.F. Barenghi // *Physical Review B*. — 2011. — Vol. 83, № 13. — P. 134509.
38. Abdurakhimov, L.V. Observation of an Inverse Energy Cascade in Developed Acoustic Turbulence in Superfluid He II / L.V. Abdurakhimov, I.A. Remizov, A.A. Levchenko // *Physical Review Letters*. — 2008. — Vol. 101, № 6. — P. 065303.
39. Abdurakhimov, L.V. Evolution of a Turbulent Cascade on the Surface of Liquid Hydrogen under a Change in the Spectral Characteristic of an Exciting Force / L.V. Abdurakhimov, M.Y. Brazhnikov, A.A. Levchenko // *JETP Letters*. — 2009. — Vol. 89, № 3. — P. 120–123.
40. Formation and decay of eddy currents generated by crossed surface waves / V.M. Parfenyev, S.V. Filatov, M.Y. Brazhnikov [et al.] // *Physical Review Fluids*. — 2019. — Vol. 4, № 11. — P. 114701.

41. Parfenyev, V.M. Influence of a thin compressible insoluble liquid film on the eddy currents generated by interacting surface waves / V.M. Parfenyev, S.S. Vergeles // *Physical Review Fluids*. — 2018. — Vol. 3, № 6. — P. 064702.
42. Impact of dissipation on the energy spectrum of experimental turbulence of gravity surface waves / A. Campagne, R. Hassaini, I. Redor [et al.] // *Physical Review Fluids*. — 2018. — Vol. 3, № 4. — P. 044801.
43. Van Dorn, W. Boundary dissipation of oscillatory waves / W. Van Dorn // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1966. — Vol. 24. — P. 769–779.
44. Levich V. G. *Physicochemical Hydrodynamics* / V. G. Levich. — 5th printing. — Englewood Cliffs : Prentice-Hall, 1962. — 700 p.
45. Miles, J.W. Surface-Wave Damping in Closed Basins / J.W. Miles // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*. — 1967. — Vol. 297, № 1450. — P. 459–475.
46. Henderson, D.M. Effects of surfactants on Faraday-wave dynamics / D.M. Henderson // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1998. — Vol. 365. — P. 89–107.
47. Henderson, D.M. The role of dissipation in the evolution of ocean swell / D.M. Henderson, H. Segur // *Journal of Geophysical Research: Oceans*. — 2013. — Vol. 118, № 10. — P. 5074–5091.
48. Langevin, D. Rheology of Adsorbed Surfactant Monolayers at Fluid Surfaces / D. Langevin // *Annual Review of Fluid Mechanics*. — 2014. — Vol. 46. — P. 47–65.
49. Parfenyev, V.M. Effects of thin film and Stokes drift on the generation of vorticity by surface waves / V.M. Parfenyev, S.S. Vergeles, V.V. Lebedev // *Physical Review E*. — 2016. — Vol. 94, № 5. — P. 052801.
50. Generation and reversal of surface flows by propagating waves / H. Punzmann, N. Francois, H. Xia [et al.] // *Nature Physics*. — 2014. — Vol. 10, № 9. — P. 658–663.
51. Liu, D. Interface instabilities in Faraday waves of two-layer liquids with free surface / D. Liu, P. Lin // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2022. — Vol. 941. — P. A33.
52. Chandrasekhar, S. *Stochastic problems in physics and astronomy* / S. Chandrasekhar // *Reviews of Modern Physics*. — 1943. — Vol. 15. — P. 1–89.

53. Hurd, A.J. Diffusion-limited aggregation in two dimensions / A.J. Hurd, D.W. Schaefer // *Physical Review Letters*. — 1985. — Vol. 54. — P. 1043–1046.
54. Templated assembly of polymer particles into mesoscopic clusters with well-defined configurations / C.S. Wagner, B. Fischer, M. May, A. Wittemann // *Colloid and Polymer Science*. — 2010. — Vol. 288. — P. 487–498.
55. Wirth, C.L. Fabrication of planar colloidal clusters with template-assisted interfacial assembly / C.L. Wirth, M.D. Volder, J. Vermant // *Langmuir*. — 2015. — Vol. 31. — P. 1632–1640.
56. Cho, Y. Finite packing of shape-anisotropic colloidal particles / Y. Cho // *Journal of Dispersion Science and Technology*. — 2015. — Vol. 36. — P. 970–982.
57. Fabrication of superhydrophobic surfaces using structured colloids / Y. Cho, J.W. Moon, D.C. Lim, Y.D. Kim // *Korean Journal of Chemical Engineering*. — 2013. — Vol. 30. — P. 1142–1152.
58. Noguchi, T.G. Dependence of the internal structure on water/particle volume ratio in an amphiphilic Janus particle-water-oil ternary system: From micelle-like clusters to emulsions of spherical droplets / T.G. Noguchi, Y. Iwashita, Y. Kimura // *Langmuir*. — 2017. — Vol. 33. — P. 1030–1036.
59. Singh, P. Fluid dynamics of floating particles / P. Singh, D.D. Joseph // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2005. — Vol. 530. — P. 31–80.
60. Feng, D. Effect of contact angle and contact angle hysteresis on the floatability of spheres at the air-water interface / D. Feng, A.V. Nguyen // *Advances in Colloid and Interface Science*. — 2017. — Vol. 248. — P. 69–84.
61. Levine, S. Capillary interaction of spherical particles adsorbed on the surface of an oil/water droplet stabilized by the particles 3. Effective interfacial tension / S. Levine, B.D. Bowen // *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*. — 1993. — Vol. 70. — P. 33–45.
62. Tansel, B. Characterization of aggregation and declustering tendency of hydrophobic fine particles in water / B. Tansel, D. Boglaienko // *Granular Matter*. — 2019. — Vol. 21, № 2. — P. 34.

63. Pratt, K.R. Turbulent clustering of initially well-mixed buoyant particles on a free-surface by Lagrangian coherent structures / K.R. Pratt, A. True, J.P. Crimaldi // *Physics of Fluids*. — 2017. — Vol. 29, № 7. — P. 075101.
64. Schulz, O. Velocity distributions of camphor particle ensembles / O. Schulz, M. Markus // *Journal of Physical Chemistry B*. — 2007. — Vol. 111, № 28. — P. 8175–8178.
65. Comparison of aggregation of rodlike and spherical particles: A fractal analysis / A. Vincze, R. Fata, M. Zrinyi [et al.] // *Journal of Chemical Physics*. — 1997. — Vol. 107, № 18. — P. 7451–7458.
66. Aggregation kinetics in two dimensions: Real experiments and computer simulations / A. Vincze, A. Agod, J. Kertész [et al.] // *Journal of Chemical Physics*. — 2001. — Vol. 114, № 1. — P. 520–529.
67. Effect of electric-field-induced capillary attraction on the motion of particles at an oil–water interface / M.P. Boneva, N.C. Christov, K.D. Danov, P.A. Kralchevsky // *Physical Chemistry Chemical Physics*. — 2007. — Vol. 9, № 48. — P. 6371–6384.
68. Self-organization of neutral particles on the surface of superfluid He II / A.A. Levchenko, E.V. Lebedeva, L.P. Mezhev-Deglin, A.A. Pelmenev // *Low Temperature Physics*. — 2019. — Vol. 45, № 5. — P. 469–475.
69. Lebedeva, E.V. Diagnostics of microparticles on the surface of water / E.V. Lebedeva, A.M. Dyugaev, P.D. Grigoriev // *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. — 2022. — Vol. 134, № 5. — P. 656–660.
70. Thielicke, W. PIVlab – towards user-friendly, affordable and accurate digital particle image velocimetry in MATLAB / W. Thielicke, E. Stamhuis // *Journal of Open Research Software*. — 2014. — Vol. 2.
71. A technique for registering wave and vortex motions on a liquid surface / S. Filatov, A. Levchenko, M.Y. Brazhnikov, L. Mezhev-Deglin // *Instruments and Experimental Techniques*. — 2018. — Vol. 61. — P. 757–763.
72. Вентцель Е. С. Теория вероятностей / Е. С. Вентцель. — 10-е изд., стер. — М.: Academia, 2005. — 576 с.

73. Фриш У. Турбулентность. Наследие А. Н. Колмогорова / У. Фриш. — М.: ФАЗИС, 1998. — 346 с.
74. Фрик П. Г. Турбулентность: подходы и модели / П. Г. Фрик. — 2-е изд., испр. и доп. — М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. — 332 с.
75. Filatov, S.V. Formation of an energy cascade in a system of vortices on the surface of water / S.V. Filatov, D.A. Khramov, A.A. Levchenko // JETP Letters. — 2017. — Vol. 106. — P. 330–335.
76. Kolokolov, I.V. Correlations of Vorticity Inside a Coherent Vortex / I.V. Kolokolov, V.V. Lebedev, M.M. Tumakova // Journal of Experimental and Theoretical Physics. — 2023. — Vol. 136, № 6. — P. 785–794.
77. Orlov, A.V. Large-Scale Coherent Vortex Formation in Two-Dimensional Turbulence / A.V. Orlov, M.Y. Brazhnikov, A.A. Levchenko // JETP Letters. — 2018. — Vol. 107, № 3. — P. 157–162.
78. Xia, H. Spectrally Condensed Turbulence in Thin Layers / H. Xia, M. Shats, G. Falkovich // Physics of Fluids. — 2009. — Vol. 21, № 12. — P. 125101.
79. Indefinite-mean Pareto photon distribution from amplified quantum noise / M. Manceau, K.Y. Spasibko, G. Leuchs [et al.] // Physical Review Letters. — 2019. — Vol. 123, № 12. — P. 123606.
80. Axtell, R.L. Zipf distribution of U.S. firm sizes / R.L. Axtell // Science. — 2001. — Vol. 293, № 5536. — P. 1818–1820.
81. Global patterns of tropical forest fragmentation / F. Taubert, R. Fischer, J. Groeneveld [et al.] // Nature. — 2018. — Vol. 554, № 7693. — P. 519–522.
82. Edward, T.L. Avalanches and the distribution of solar flares / T.L. Edward, J.H. Russell // Astrophysical Journal. — 1991. — Vol. 380. — P. L89–L92.
83. Stefani, F.D. Beyond quantum jumps: Blinking nanoscale light emitters / F.D. Stefani, J.P. Hoogenboom, E. Barkai // Physics Today. — 2009. — Vol. 62, № 2. — P. 34–39.

84. Jones, C.I. Pareto and Piketty: The macroeconomics of top income and wealth inequality / C.I. Jones // Journal of Economic Perspectives. — 2015. — Vol. 29, № 1. — P. 29–46.
85. Justo, W.R. Zipf's law and the Gibrat's law: What do the facts have to say about the Brazilian cities? / W.R. Justo // Journal of Finance and Economics. — 2014. — Vol. 2, № 5. — P. 136–144.